ИНСТИТУТ ЭКОНОМИКИ
ПЕРЕХОДНОГО ПЕРИОДА

Научные труды № 14Р

С. Дробышевский

Обзор современной теории временной структуры процентных ставок. Основные гипотезы и модели

Москва
1999

Институт экономики переходного периода
Основан в 1992 г.
Учредитель: Академия народного хозяйства при Правительстве РФ

Директор: Е.Т. Гайдар

ISBN 5-93255-008-2

Лицензия на издательскую деятельность № ЛР 021018 от 09 ноября 1995 г.

103918, Москва, Газетный пер., 5
Тел. (095) 229–6413, FAX (095) 203–8816
E-MAIL – root @iet.ru, **WEB** Site – http://www.iet.ru
Институт экономики переходного периода

Данная работа посвящена обзору современной теории временной структуры процентных ставок. В работе представлены основные гипотезы, объясняющие временную структуру (гипотезы ожиданий, предпочтения ликвидности, а также гипотезы об изменяющейся во времени премии за срок, сегментации рынков и "предпочитаемой" среды). Приведен краткий обзор их эмпирических проверок. Модели временной структуры отнесены к четырем классам: макроэкономические подходы, факторные стохастические модели, стохастические модели общего равновесия и модели с отсутствием арбитража. Рассмотрены основные модели временной структуры в каждом классе и описаны результаты их эмпирических сравнений.

Содержание

Вступление

Во второй половине XX-го века роль рынка государственных ценных бумаг в экономике значительно возросла. Государственные заимствования на открытом рынке стали в подавляющем большинстве стран мира основным источником средств для финансирования бюджетных дефицитов и осуществления государственных инвестиционных проектов. Операции на открытом рынке (покупка/продажа государственных облигаций) являются наиболее важным инструментом денежно-кредитной политики для любого центрального банка, независимо от того, каков его целевой ориентир - уровень процента или объем денежного предложения. Рынки государственных ценных бумаг большинства стран, как экономически развитых, так и развивающихся, а также стран с переходной экономикой, интернациональны, поскольку выступает в качестве объекта инвестирования не только для отечественного, но и для иностранного капиталов[1].

Современная теория финансовых рынков предлагает значительный объем разработок, гипотез и моделей по различным аспектам функционирования всех сегментов финансового рынка, в том числе рынка государственных ценных бумаг. Наиболее характерной особенностью уровня ставки процента (доходности) по наиболее распространенному виду государственных ценных бумаг, государственным облигациям, явля-

---

[1] В том числе, для так называемых "горячих" денег, притоки или оттоки которых могут спровоцировать острейший финансовый кризис в экономике страны, что наглядно продемонстрировали события последних двадцати лет в странах Латинской Америки, а также кризис в России и ряде стран СНГ в 1998 году.

ется отсутствие уникальной составляющей в оценке риска по данному виду ценных бумаг[2]. Это свойство дает возможность исследовать уровень и динамику доходности государственных ценных бумаг в зависимости, в первую очередь, от фундаментальных факторов и показателей ожиданий экономических агентов. К данному направлению теории финансовых рынков относятся модели процента на основе гипотезы И.Фишера, паритета процентных ставок и с учетом эффекта ликвидности.

Важным предметом исследования в рамках теории финансовых рынков является анализ соотношения между доходностями государственных ценных бумаг (или любых других срочных финансовых инструментов) с различными сроками до погашения, т. е. анализ *временной структуры процентных ставок*.

К настоящему времени теория временной структуры процентных ставок представлена в русскоязычной экономической литературе лишь на самом элементарном уровне в учебниках по инвестициям и финансовому анализу[3]. В то же время рассматриваемая тема включает в себя множество моделей и исследований, широко используемых как при теоретическом анализе финансовых рынков на макроэкономическом уровне, так и при практической работе на рынках срочных и производных финансовых инструментов.

Данная работа имеет своей целью обобщить и дать читателю представление об основных гипотезах и моделях временной структуры процентных ставок, современном состоянии эмпирических исследований по различным аспектам данной темы. Автор не стремился описать все упомянутые модели временной структуры подробно, в частности, большинство

---

[2] В том числе риска дефолта, не связанного с систематическим риском.

[3] В качестве исключения можно назвать статью О.Буклемешева и А.Поманского в журнале "Экономика и математические методы" в 1992 году, посвященную описанию одной из наиболее важных моделей временной структуры - модели Кокса-Ингерсолла-Росса (см. Буклемешев, Поманский, 1992) и эмпирические оценки гипотезы ожиданий для рынка ГКО-ОФЗ в работе ИЭППП в 1998 году (см. Энтов и др., 1998).

промежуточных математических выкладок при обращении к той или иной модели временной структуры опущено.

Обзор состоит из семи параграфов, списка литературы и приложения. Первый параграф содержит основные понятия и определения, используемые в теории временной структуры. Во втором параграфе представлены пять гипотез временной структуры (ожиданий, предпочтения ликвидности, об изменяющейся во времени премии за срок, сегментации рынков и "предпочитаемой" среды), а также дан краткий обзор их эмпирических проверок. Третий параграф посвящен макроэкономическим подходам к анализу временной структуры процентных ставок. Четвертый, пятый и шестой параграфы включают описание трех классов стохастических моделей временной структуры (факторные модели, модели общего равновесия и модели с отсутствием арбитража). Наконец, седьмой параграф представляет собой обзор основных работ по эмпирическим проверкам различных моделей временной структуры. В приложении даны основные положения теории стохастических процессов, используемых в стохастических моделях временной структуры.

1. Основные понятия и определения

Прежде чем приступить к описанию гипотез и моделей временной структуры доходности ценных бумаг, определим основные термины и понятия, используемые в теории временной структуры, а также их математическую запись. В этом параграфе автор следует терминологии и формулировкам, используемым в *Campbell, 1986; Shiller, 1990; Cuthbertson, 1996; Campbell, Lo, MacKinlay, 1997; Mishkin, 1997; Backus, Foresi, Telmer, 1998; Шарп, Александр, Бэйли, 1998.*

Под словом "**облигация**" будет пониматься любое долговое обязательство, оформленное в виде рыночной ценной бумаги, платежи (платеж) по которому определены в номинальных (денежных единицах) или реальных (напр., по отношению к индексу потребительских цен) величинах. Облигации делятся на дисконтные и купонные.

Дисконтная облигация – ценная бумага, доход по которой определяется за счет разницы (дисконта) между ценой покупки (размещения) облигации и ее номиналом, уплачиваемым при погашении.

Купонная облигация – ценная бумага, доход по которой складывается как сумма купонных выплат за период обращения облигации и, возможно, дисконта (положительного или отрицательного) между ценой покупки (размещения) облигации и ее номиналом, уплачиваемым при погашении.

При формулировании гипотез и построении моделей временной структуры для упрощения записи мы будем рассматривать исключительно дисконтные облигации, поэтому все определения далее относятся к дисконтным облигациям.

Дата погашения (*maturity*) – установленная при выпуске (размещении) облигации дата выплаты номинала облигации, *T*.

Срок до погашения (*term, time to maturity*) – временной интервал от текущей даты до даты погашения данной облигации, $m = T - t$.

Дюрация (*duration*) – взвешенное среднее временных интервалов до всех купонных платежей за период до погашения облигации, где в качестве весов выступают купонные ставки (согласно *Macaulay, 1938*), *D*. Для дисконтной облигации $D = m$.

В каждый момент времени *t* дисконтная облигация с датой погашения *T* (со сроком до погашения *m*) имеет рыночную цену $p(t, T)$, или $p(t, m)$, которая определяется в результате достижения равновесия между спросом и предложением. Если принять номинал облигации за единицу, то, очевидно, в любой момент времени $t' < T$ цена облигации $p(t, T) < 1$ и постепенно увеличивается по мере приближения даты погашения. В этом случае **доходность к погашению** (*yield to maturity*) равна темпу роста цены облигации до единицы к дате погашения.

Отсюда следует, что цена облигации в каждый момент времени t', $t \le t' \le T$, должна определяться из условия

$$p(t', T) = p(t, T)e^{(t'-t)r(t,T)},$$

где $r(t, T)$ – доходность к погашению (ставка процента) в момент *t* дисконтной облигации с датой погашения *T*. Приравняв цену облигации в момент погашения к единице, т.е. $p(t' = T, T) = 1$, мы получаем:

$$r(t, T) = \frac{-\ln[p(t, T)]}{T - t}.$$

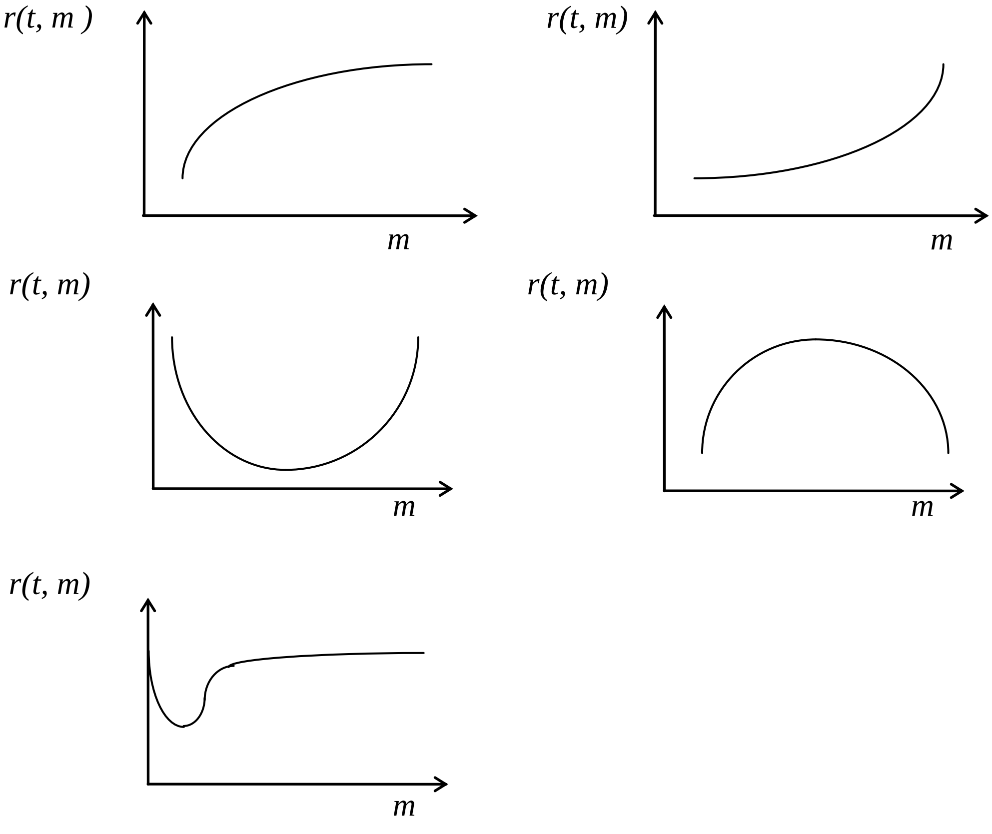
В данной форме записи доходность к погашению называется еще **спот-ставкой** (*spot-rate*) по облигации, либо **доходностью к погашению в непрерывном исчислении** (*continuously compounded yield to maturity*), **мгновенной ставкой процента** (*instantaneous compound interest*).

В каждый момент времени на рынке наблюдается множество спот-ставок по облигациям с различными датами погашения (сроками до погашения). **Временной структурой процентных ставок** (*term structure of interest rates*) называется функция, связывающая доходность к погашению каждой из облигаций с ее сроком до погашения, т.е. $r(t, m) = F(t, m)$, или

$$F(t, m) = \frac{-\ln[p(t, m)]}{m}.$$

Рисунок 1.1

Различные формы кривой доходности



Таким образом, временная структура доходности облигаций в каждый момент времени задается множеством цен облигаций с различными сроками до погашения. Если срок до погашения облигации относительно мал, то спот-ставка по такой облигации называется **краткосрочной ставкой** (*short-term rate*), если срок – большой, то – **долгосрочной ставкой** (*long-term rate*).

Кривая доходности (*yield curve*) – график, отображающий соотношение между доходностью облигаций с различными сроками до погашения и сроком до погашения (см. рис. 1.1).

Процентный спрэд по облигациям (*yield spread*) – разность между доходностью облигации со сроком до погашения m и доходностью облигации, погашаемой в момент $t + 1$, т. е. $s(m, t) = r(t, m) - r(t, 1)$.

Форвардная ставка (*forward rate*) – неявная (*implicit*) ставка, определяемая на основе наблюдаемой временной структуры процентных ставок. Форвардная ставка на будущий период $n = T - t'$ равна ставке, вычисляемой в момент t на основе спот-ставок по облигациям со сроками до погашения t' и T, и рассчитывается по следующей формуле (для дисконтных облигаций):

$$f(t,t',T) = \frac{(T-t)r(t,T) - (t'-t)r(t,t')}{T-t'} . \qquad (1.1)$$

Предел (1.1) при t' стремящемся к T обозначается $f(t, T)$ и называется **мгновенной форвардной ставкой** (*instantaneous forward rate*)[4]:

$$f(t,T) = r(t,T) + (T-t)\frac{\partial r(t,T)}{\partial T} ,$$

или

$$f(t,m) = r(t,m) + m\frac{\partial r(t,m)}{\partial m} . \qquad (1.2)$$

---

[4] В дальнейшем мы будем пользоваться записью как в непрерывной, так и в дискретной форме в зависимости от удобства в каждом конкретном случае.

Решив дифференциальное уравнение (1.2), мы находим, что форвардная ставка *f(t, t', T)* равна среднему мгновенных форвардных ставок за период [*t'*, *T*]:

$$f(t,t',T) = \frac{1}{T-t'}\int_{t'}^{T} f(t,s)\mathrm{d}s\,.$$

С другой стороны форвардная ставка может быть определена как

$$f(t,t+m-1,T) = \ln[\frac{p(t,m-1)}{p(t,m)}].$$

Это эквивалентно

$$r(t,m) = \frac{\sum_{m=0}^{T-1} f(t,t+m+1,T)}{m}\,.$$

Таким образом, спот-ставка равна среднему форвардных ставок за период до погашения облигации.

Ставка за период владения облигацией (*holding period rate*) – доходность от продажи облигации, купленной ранее. Для дисконтной облигации эта доходность равна доходности от продажи облигации в момент *t'* по цене *p(t', T)*, если она была куплена ранее в момент *t* по цене *p(t, T)*.

$$h(t,t',T) = \frac{(T-t)r(t,T)-(T-t')r(t',T)}{t'-t}\,. \qquad (1.3)$$

Мгновенная ставка за период владения облигацией (*instantaneous holding return*) равна $H(t,T) = \frac{\partial p(t,T)}{p(t,T)}$.

Для нахождения соотношения между ставкой за период владения облигацией и спот-ставкой выразим ставку за период владения облигацией через цены облигации в моменты покупки, *t*, и продажи, $t' = t+1$:

$$h(t,t',T) = \frac{p(t',T)}{p(t,T)} = \frac{\exp[(T-t)r(t,T)]}{\exp[(T-t')r(t',T)]}\,. \qquad (1.4)$$

Таким образом, ставка за период владения облигацией тем выше, чем выше облигация имела доходность в момент покупки, и чем ниже – при продаже.

Прологарифмировав уравнение (1.4) и подставив $t = t' - 1$, мы получаем, что ставка за период владения облигацией определяется спот-ставкой в момент покупки облигации и изменением спот-ставки за период владения:

$$h(t,t',T) = r(t,T) - (T - t')[r(t',T) - r(t,T)]. \tag{1.5}$$

Если в уравнении (1.5) спот-ставки выразить через цены облигаций, то, суммируя по всему сроку до погашения, мы получим:

$$p(t,T) = \sum_{t=0}^{T-1} h(t,t+1,T)$$

или

$$r(t,T) = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} h(t,t+1,T)}{T - t}. \tag{1.6}$$

Уравнение (1.6) показывает, что доходность к погашению дисконтной облигации равна средней за время до погашения ставке за период владения облигацией.

Форвардная премия за срок (*forward term premium*), **премия за ликвидность** (*liquidity premium*) – это разность между форвардной ставкой и условным ожиданием соответствующей будущей ставки:

$$\Phi_f(t,t',T) = f(t,t',T) - \mathrm{E}_t r(t',T), t < t' < T, \tag{1.7}$$

где E_t – оператор математического ожидания.

Премия за срок владения облигацией (*holding period term premium*) для периода $t < t' < T$ определяется как разность между условным ожиданием доходности за период владения облигацией и соответствующей спот-ставкой:

$$\Phi_h(t,t',T) = E_t h(t,t',T) - r(t,t'), t < t' < T. \tag{1.8}$$

Гипотезы, объясняющие причины возникновения и смысл премий за срок, будут представлены ниже.

Из формул 1.1, 1.3, 1.7 и 1.8 получаем соотношение между форвардной премией за срок и премией за срок владения облигацией:

$$\Phi_h(t,t',T) = \frac{T-t}{t'-t-1}\Phi_f(t,t',T), t < t' < T \ ,$$

т. е. $\Phi_h(t,t',T) > \Phi_f(t,t',T)$.

2. Гипотезы кривой доходности ценных бумаг

2.1. Гипотеза ожиданий

Интерес к изучению временной структуры процентных ставок возник давно, еще в конце XIX века. Первой (и наиболее часто проверяемой в эмпирических исследованиях до сих пор) является гипотеза ожиданий.

Гипотеза ожиданий (*expectations hypothesis*)**,** в общем виде, предполагает, что долгосрочные процентные ставки отражают ожидания краткосрочных ставок.

Предположения о том, что текущие долгосрочные процентные ставки должны содержать информацию о будущих коротких ставках появились еще в конце XIX века *(Bohm-Bawerk, 1891; Fisher, 1896*). Значительный вклад в развитие данной гипотезы был сделан в работе И. Фишера в 1930 году, посвященной изучению взаимосвязи между реальной и номинальной ставками процента *(Fisher, 1930*). Представление номинальной процентной ставки как суммы желаемой реальной процентной ставки и ожидаемой инфляции позволило выдвинуть идею о способности долгосрочных процентных ставок предсказывать не только короткие ставки, но и инфляцию (при условии постоянного уровня реального процента)[5].

[5] К ряду ранних работ, посвященных обсуждению предсказательных возможностей процентных ставок, относятся публикации *Williams, 1938; Lutz, 1940; Hicks, 1946*.

Различают два типа гипотезы ожиданий: **чистую гипотезу ожиданий** (*pure expectations hypothesis*) и, собственно, **гипотезу ожиданий** (*expectations hypothesis*).

Чистая гипотеза ожиданий утверждает, что долгосрочные процентные ставки равны среднему от ожидаемых краткосрочных процентных ставок. В первоначальном виде гипотеза ожиданий предполагала совершенное предвидение (*perfect foresight*) и нейтральность инвесторов по отношению к риску (*risk neutrality*)[6]. Это утверждение равносильно нескольким эквивалентным определениям.

1) Ожидаемая доходность от владения облигациями с любыми сроками до погашения за период времени n будет одинаковой и равна спот-ставке по облигации с сроком до погашения n:

$$\begin{array}{l} \mathrm{E}_t h(t, t+n, m) - r(t, n) = 0 \\ \forall m, n \le m \end{array},$$

или

$$\Phi_h(t, t+n, m) = 0 .$$

2) Спот-ставка по облигации, погашаемой через n периодов, равна ожидаемой ставке за период владения облигацией с большим сроком до погашения:

$$\begin{array}{l} r(t, n) = \mathrm{E}_t h(t, t+n, m) \\ n < m \end{array}.$$

3) Доходность долгосрочной облигации равна среднему ожидаемых доходностей краткосрочных облигаций за весь срок до погашения:

$$r(t, T) = \frac{\sum_{t=0}^{T-1} \mathrm{E}_t r(t, 1)}{T - t} .$$

[6] Данных подход был развит в работах *Meiselman, 1962; Malkiel, 1966; Bierwag, Grove, 1967 и др*.

4) Форвардная премия за срок равна нулю для любого срока до погашения (форвардная ставка равна ожидаемой спот-ставке):

$$\begin{aligned} &\Phi_f(t,t',m)=0, \forall m \\ &f(t,t+1,T)=\mathrm{E}_t r(t+1,T) \end{aligned} . \qquad (2.1)$$

Из формулы (2.1) следует, что однопериодная форвардная ставка по инвестициям, совершенным через какое-то время *n* в будущем, должна обладать свойством мартингала:

$$\begin{aligned} &f(t,t+n,t+n+1)=\mathrm{E}_t r(t+n,t+n+1)= \\ &=\mathrm{E}_t[\mathrm{E}_{t+1} r(t+n,t+n+1)]=\mathrm{E}_t f(t+1,t+n+1,t+n+2) \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Однако многие исследователи (например, *Stiglitz, 1970; LeRoy, 1982*), указывали на то, что в таком виде гипотеза ожиданий противоречила ряду требований к общепринятому к началу 70-х годов представлению динамики цен в виде стохастических процессов. В частности, не могло быть выполнено условие неравенства Дженсена (*Jensen's inequality, Shiller, 1990*). Развитие теории рациональных ожиданий (*Muth, 1961; Lucas, 1972; Sargent, Wallace, 1975*) позволило преодолеть возникшее противоречие. С этого времени гипотеза ожиданий для временной структуры предполагала наличие ненулевой премии в зависимости от срока до погашения. Гипотеза рациональных ожиданий применительно к временной структуре процентных ставок вошла в большинство учебников по теории финансов, макроэкономике и денежной теории под названием собственно гипотезы ожиданий (напр., *Sargent, 1987; Brealey, Myers, 1991; Romer, 1996; Cuthbertson, 1996; Mishkin, 1997; Шарп, Александер, Бэйли, 1998*).

Согласно данной гипотезе ожиданий ожидаемая избыточная доходность (премия за срок) равна постоянной величине, одинаковой для облигаций со всеми сроками до погашения,

$$\mathrm{E}_t h(t,t+1,m)-r(t,1)=\Phi, \forall m,$$

т. е. форвардная премия за срок постоянна и одинакова для всех сроков до погашения[7]:

$$\Phi_f(t,t',m) = \Phi, \forall m .$$

Оба вида гипотезы ожиданий обладают рядом свойств, позволяющих объяснить форму наблюдаемых кривых доходности. Во-первых, они объясняют, почему доходности облигаций с различными сроками до погашения движутся однонаправлено. Если рост краткосрочных процентных ставок сегодня воспринимается как долгосрочное повышение уровня процента, то сохраняются ожидания их роста и в будущем. Ожидаемое повышение краткосрочных ставок вызывает рост долгосрочных ставок в текущем периоде. Таким образом, краткосрочные и долгосрочные ставки движутся однонаправлено.

Во-вторых, гипотезы ожиданий объясняют, почему кривая доходности имеет положительный наклон, когда краткосрочные ставки низки, и отрицательный наклон, когда краткосрочные ставки высоки. Если краткосрочные ставки низки (ниже долгосрочного среднего уровня), то экономические агенты ожидают их роста, если высоки (выше долгосрочного среднего уровня) – снижения. Таким образом долгосрочные ставки, равные среднему текущих и будущих краткосрочных ставок, оказываются выше или ниже доходности коротких облигаций.

В-третьих, данные гипотезы объясняют большую волатильность краткосрочных ставок по сравнению с долгосрочными. Поскольку процентные ставки демонстрируют свойство возвращаться к среднему (*mean-reverting*), то среднее краткосрочных ставок должно иметь меньшую волатильность, чем сами спот-ставки.

Однако гипотезы ожиданий не могут объяснить тот факт, что кривая доходности имеет преимущественно положительный наклон. В этом случае, согласно гипотезе, краткосрочные процентные ставки чаще находятся ниже долгосрочного среднего уровня. Кроме того, согласно приведенным выше форму-

---

[7] Аналогично выражениям (2.1) и (2.2) форвардную ставку в этом случае можно определить как мартингал со сдвигом, равным Φ.

лировкам обоих типов гипотезы ожиданий кривая доходности должна стремиться к горизонтальной прямой, что на практике наблюдается редко.

Допущение о возможности наличия постоянной премии за срок позволило сблизить гипотезу ожиданий и альтернативный подход, развиваемый на протяжении десятилетий – теорию предпочтения ликвидности.

2.2. Гипотеза предпочтения ликвидности

Первые предположения о том, что форвардные ставки (т. е. будущие ставки, рассчитываемые на основе соотношения текущих коротких и долгосрочных ставок) должны содержать положительную премию (премию за риск, *risk premium,* или премию за срок, *term premium*) высказывались уже в 30 – 40 годы XX века (*Keynes, 1930, 1936; Lutz, 1940; Hicks, 1946*). Дж. Хикс предполагал, что такая премия необходима, поскольку в противном случае инвесторы не будут делать различия между краткосрочными и долгосрочными вложениями, кроме как из предпочтений ликвидности. Поэтому ставки на более длинные сроки должны быть выше, чем короткие, чтобы привлечь вложения на долгий срок. Более оригинальная гипотеза была высказана Лутцем (*Lutz, 1940*): он считал, что поскольку деньги, самый ликвидный актив, не приносят процента, то процент по ценным бумагам должен быть тем выше, чем дольше их срок до погашения (т. е. чем менее они ликвидны).

Гипотеза предпочтений ликвидности (*liquidity preference hypothesis*) предполагает, что форвардная премия за срок постоянна во времени, но зависит от срока до погашения облигации, $\Phi_f(t,t',m)=\Phi(m)$. Облигации с большим сроком до погашения рассматриваются как более рисковые, чем краткосрочные облигации, даже если мы рассматриваем один и тот же период владения облигациями. С ростом срока до погашения премия за ликвидность и, соответственно, ожидаемая ставка за период владения облигацией увеличиваются:

$$E_t h(t,t+1,m)-r(t,1)=\Phi(m)$$

$$\Phi(m)>\Phi(m-1)>\Phi(m-2)>\ldots$$

Гипотеза предпочтения ликвидности объясняет (в той же логике. что и гипотеза ожиданий) однонаправленное движение краткосрочных и долгосрочных спот-ставок, положительный наклон кривой доходности. Однако она не может в полной мере объяснить отрицательный наклон кривой доходности. Согласно данной гипотезе, долгосрочные ставки могут быть ниже краткосрочных только в том случае, если краткосрочные ставки настолько сильно превышают средний уровень, что это перекрывает положительную премию за срок.

Дальнейшее развитие гипотезы было направлено на изучение свойств премии: является ли премия постоянной (*constant term premium*), либо она изменяется под воздействием других факторов (*time-varying term premium*). В частности, Вудвард и Дэй (*Woodward, 1983; Day, 1986*) предполагали, что премия, в большей степени определяется предельной склонностью к потреблению, чем предельной склонностью к замещению между бумагами с различными сроками до погашения.

2.3. Гипотеза об изменяющейся во времени премии за срок

Гипотеза об изменяющейся во времени премии за срок (*time varying term premium*) учитывает возможность влияния экзогенных переменных состояния на уровень и знак форвардной премии за срок. Ожидаемая избыточная доходность от владения облигациями с разными сроками до погашения зависит как от срока до погашения, так и от экзогенных факторов, изменяющихся во времени. Таким образом, премия за срок зависит от срока до погашения облигации и изменяется во времени:

$$\begin{gathered} \mathrm{E}_t h(t, t+1, m) - r(t,1) = \Phi(m, z) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial m} > 0; \frac{\partial \Phi}{\partial z} \lesseqgtr 0; z = z(t) \end{gathered},$$

где $z = z(t)$ – функция, описывающая изменение переменной состояния во времени.

Наибольшее распространение получило направление исследований, связывающих колебания и знак премии за срок с движением макроэкономических переменных и циклов экономической активности. В работах Барро, Плоссера, Турновски и Миллера, Ли (*Barro, 1974; Plosser, 1982, 1987; Turnovsky, Miller, 1984; Lee, 1991; Balduzzi, Corsetti, Foresi, 1997*) изучались эффекты фискальной политики и государственных расходов на динамику краткосрочных и долгосрочных ставок. В частности, выполняется ли условие "эквивалентности Рикардо" (*Ricardo Equivalence*) для ставок с различными сроками до погашения облигации. Ряд экономистов (*McCafferty, 1986; Breeden, 1986; Harvey, 1988; Sill, 1996*) рассматривали модели, связывающие цикличность потребления и структуру процентных ставок. Большое число работ посвящено объяснению наклона кривой доходности в контексте циклов экономической активности и ожиданий экономического роста или рецессии. Среди них можно упомянуть статьи *Mankiw, Summers, 1984; Harvey, 1989; Chen, 1991; Labadie, 1994; Friedman, Kuttner, 1994; Wang, 1996; Roma, Torous, 1997.*

К данному направлению исследований относятся построение теорий временной структуры с учетом риска и предпочтений ликвидности (*Backus, Gregory, Zin, 1989; Salyer, 1990; Abel, 1998; Domowitz, Glen, Madhaven, 1998*), ликвидности рынка (Elton, Green, 1998), изменения реального курса национальной валюты и степени открытости экономики (*Svensson, 1991; Dillen, 1997*), шоков денежно-кредитной политики (*Campbell, 1995*), информационных потоков и календарных эффектов (*Jones, Lamont, Lumsdaine, 1996*), политики регулирования ставок (*Mankiw, Miron, 1986; Balduzzi, Bertola, Foresi, 1996*), изменения режима налогообложения (*Green, Odegaard, 1997; Elton, Green, 1998*), политических процессов (*Miller, 1997a*), неопределенности ожиданий инфляции (*Miller, 1997b*).

Однако в ряде работ (например, *Campbell, 1986*) указывалось на то, что фактически наблюдаемая премия может быть представлена в виде суммы премий за срок, за риск, за ликвидность, а также ожиданий изменения уровня процентной ставки. В этом случае отдельные компоненты общей премии могут оставаться постоянными при изменении других, что не позволяет полностью отвергнуть предположение о постоянстве премии за срок.

2.4. Гипотеза сегментации рынков

Третьей гипотезой, объясняющей различие в уровнях доходности бумаг с различными сроками погашения, является теория сегментации рынков.

Гипотеза сегментации рынков (*market segmentation hypothesis*) основывается на предположении о том, что различные инвесторы могут иметь различные предпочтения относительно желаемых сроков инвестирования, либо принуждены законодательно осуществлять вложения в облигации с определенными сроками до погашения[8]. В таком случае, вероятно, существуют несколько отдельных рынков для бумаг с различными сроками до погашения, и цены облигаций устанавливаются в зависимости от спроса и предложения на каждом из рынков. При этом, вследствие разного рода ограничений, арбитраж между этими рынками невозможен, и облигации с различными сроками до погашения не могут выступать как субституты при инвестировании на какой-либо период времени.

Таким образом, рассчитываемый избыточный доход от владения облигацией с определенным сроком до погашения (форвардная премия за срок) зависит от объема предложения и спроса на облигации с каждым из сроков до погашения:

$$\mathrm{E}_t\, h(t, t+1, m) - r(t,1) = \Phi(s)$$
$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} \lessgtr 0; s = s(t, m) \qquad ,$$

[8] Например, на рынке можно выделить группу мелких инвесторов, рыночных спекулянтов, финансовых менеджеров, управляющих свободными средствами фирм и группу институциональных инвесторов (взаимные и пенсионные фонды). Участники первой группы предпочитают краткосрочные бумаги, поскольку они имеют более высокие предпочтения ликвидности, а представители второй группы инвестируют преимущественно в долгосрочные бумаги, так как это гарантирует им стабильный и более высокий доход на протяжении длительного периода.

где $s = s(t, m)$ – функция, определяющая относительную привлекательность облигаций со сроком погашения m в общем объеме всех выпущенных облигаций.

Предположение о том, что ставки процента на разные сроки отличаются вследствие того, что спрос на активы с разным сроком обращения предъявляется со стороны различных групп инвесторов, было впервые выдвинуто в работе *Culbertson, 1957*.

Гипотеза сегментации рынков объясняет преимущественно положительный наклон кривой доходности тем, что спрос на долгосрочные облигации обычно меньше, чем на краткосрочные. Однако данная гипотеза не может убедительно ответить на вопросы, почему ставки по краткосрочным и долгосрочным облигациям движутся однонаправлено и почему кривая доходности имеет положительный наклон при низких краткосрочных ставках и отрицательный – при высоких.

2.5. Гипотеза "предпочитаемой среды"

Пятой гипотезой, объясняющей вид кривой доходности, является так называемая "теория предпочитаемой среды". Впервые гипотеза была выдвинута в статье *Modigliani, Sutch, 1966*.

Теория предпочитаемой среды (*preferred habitat theory*) отрицает наличие фундаментальных макроэкономических основ определения форвардной премии за срок. Предполагается, что инвестор, в первую очередь – непрофессиональный, имеет свой собственный горизонт инвестиций (наиболее приемлемый и удобный для него с точки зрения получаемого дохода, цели инвестирования и трансакционных издержек срок вложения) и предпочитает покупать облигации, срок до погашения которых не выходит за его пределы. Наблюдаемая на рынке временная структура доходности ценных бумаг является результатом принятия экономическими агентами множества независимых решений. В каждой из таких "сред" существуют свои спрос и предложение, что может приводить к любому знаку и изменению премии за срок. Таким образом, лишь облигации с близкими сроками до погашения могут рассматриваться как субституты и иметь одинаковую форвардную премию за срок. По своим объясняющим свойствам теория предпочитаемой среды близка гипотезе сегментации рынков.

Данная гипотеза, фактически, не противоречит ни одному из перечисленных ранее предположений, объясняющих временную структуру процентных ставок, что показано в работах *Mishkin, 1980, 1997; Mankiw, 1986*.

2.6. Обзор эмпирических проверок гипотез временной структуры

Первые эмпирические исследования временной структуры процентных ставок были посвящены проверке чистой гипотезы ожиданий. Их авторы (*Macauley, 1938; Hickman, 1942; Culbertson, 1957*) не смогли доказать, что текущие ставки по долгосрочным облигациям предсказывают будущие короткие ставки.

С началом революции "эффективных рынков" в теории финансов авторы стали включать предположения о рациональности ожиданий в свои модели. Первые тестирования гипотезы рациональных ожиданий в отношении временной структуры процентных ставок (*Meiselman, 1962; Kessel, 1965*) подтвердили, что форвардные ставки в большинстве случаев правильно предсказывают знак изменения коротких процентных ставок на любых сроках. Однако эти результаты были подвергнуты критике (*Buse, 1967*), в первую очередь, из-за неудачной спецификации тестируемых уравнений. Таким образом, выводы Майсельмана были справедливы только в предположении, если ожидания экономических агентов отвечали свойствам оптимальных линейных прогнозов (*optimal linear forecasts property, Diller, 1969; Nelson, 1970; Shiller, 1978*).

В дальнейшем большинство исследователей отказались от проверки чистой гипотезы ожиданий, поскольку она не подтверждалась (*Taylor, 1992*). В то же время, *Modigliani, Shiller, 1973; Friedman, 1979, 1980; Kane, 1983; Shiller, Campbell, Schoenholtz, 1983; Fama, 1984; Campbell, 1986* показали, что временная структура доходности американских казначейских обязательств соответствует предположению о *постоянной* премии за срок[9].

Разработка нового математического аппарата (модели ARCH, GARCH, *Engle, 1982; Bollerslev, 1986; Engle, Ng, Rothschild, 1990*) позволила ввести в модель условную дисперсию ошибок прогноза, отвечающую за сильные колебания временных рядов форвардных ставок. Такие колебания, по мнению критиков (например, *Culbertson, 1957*), не могли соответствовать ни одному из видов ожиданий. Однако в конце 70-х – начале 80-х годов Шиллер и др. исследователи (*Shiller, 1979, 1981, 1986; Singleton, 1980; Flavin, 1983*) показали, что высокая дисперсия ошибок прогноза вследствие более высокой волатильности долгосрочных ставок либо нестационарности коротких ставок, не противоречит предположению о постоянстве премии за срок.

Исследование проблемы нестационарности (наличия единичного корня) рядов доходности облигаций с различными сроками до погашения составляет отдельный класс работ в области теории временной структуры. Наличие единичного корня во временном ряду изменений ставок с одинаковым сроком до погашения (т. е. "случайное блуждание", *random walk*, приростов ставок) должно свидетельствовать о невозможности предсказывать процентные ставки в будущие. Первое предположение о нестационарности ряда форвардных ставок было сделано (и отвергнуто при проверке на недельных данных по казначейским обязательствам США) Роллом в 1970 году (*Roll, 1970). Филипс и Пиппенгер, Мишкин, Песандо (Phillips, Pippenger, 1976, 1979; Mishkin, 1978; Pesando, 1981, 1983*) утверждали, что единичный корень свойственен долгосрочным процентным ставкам.

С другой стороны, несмотря на то, что отдельные ряды доходностей с разными сроками до погашения нестационарны, их линейная комбинация может быть стационарна, т.е. ряды

[9] Премия положительна и зависит только от срока облигации до погашения (и уровня процента), но не от времени. Изменение наклона кривой доходности может означать только изменение ожиданий относительно будущих процентных ставок.

коинтегрированы. Коинтеграция означает наличие долгосрочной взаимосвязи между ставками различной срочности, в то время как их краткосрочные колебания могут рассматриваться как "случайное блуждание".

Дальнейшие исследования не дали однозначного ответа на вопрос, присущи ли движению процентных ставок с различной срочностью свойства "случайного блуждания", являются ли временные ряды коинтегрированными. Наиболее вероятным представляется предположение о том, что свойства рядов временной структуры не постоянны. Они значительно отличаются в разных странах и на разных периодах наблюдения, а также в зависимости от срочности рассматриваемых ставок. К ряду исследований, доказывающих наличие единичного корня в рассматриваемых временных рядах и отрицающих коинтеграцию между ними, относятся работы *Rose, 1988; Bradley, Lumpkin, 1992; Mougoue, 1992; Zhang, 1993; Guest, McLean, 1998*. Напротив, гипотеза о наличии долгосрочной взаимосвязи между краткосрочными и долгосрочными ставками (коинтеграция) при наблюдении свойств "случайного блуждания" у рядов ставок подтверждается в статьях *Wallace, Warner, 1993; Engstead, Tanggaard, 1994a,b; Johnson, 1994; Clinebell, Kahl, Stevens, 1996; Cuthbertson, Hayes, Nitzsche, 1998.*

Проверка гипотезы ожиданий (с учетом предпосылки о рациональных ожиданиях у участников рынка) остается до настоящего момента достаточно популярным объектом эмпирических исследований среди экономистов. Во многих случаях были найдены доказательства ее правомерности[10]. В то же время, в ряде исследований авторы показали, что устойчивая взаимосвязь между долгосрочными и будущими короткими процентными ставками отсутствует, и анализ изменений ставок не может отвергнуть гипотезу об их "случайном блужда-

[10] См., напр., *Fama, Bliss, 1987; Leiderman, Blejer, 1987; MacDonald, Speight, 1988; Hamilton, 1988; Froot, 1989; McFadyen, Pickerill, Devaney, 1991; Campbell, Shiller, 1991; Choi, Wohar, 1991; Taylor, 1992; Engsted, 1993, 1996; Mishkin, 1993; Sola, Driffill, 1994; McCullum, 1994; Svensson, 1994; Mandeno, Giles, 1995; Karfakis, Moschos, 1995; Gerlach, Smets, 1997; Dhillon, Lasser, 1998, и др*.

нии": *Elton, Gruber, Rentzler, 1983; Mills, 1991; Dahlquist, 1995; Balduzzi, Bertola, Foresi, 1997; Hassler, Nautz, 1997; Guest, McLean, 1998, и др. Грэй, Анг и Бекэрт (Gray, 1996; Ang, Bekaert, 1998*) использовали методы регрессионного анализа, допускающие наличие разных режимов на рассматриваемом периоде, и показали, что свойства временных рядов процентных ставок и спрэда между спот-ставкой и долгосрочными ставками изменяются во времени. Анализ основных причин расхождения результатов проверок гипотезы ожиданий и описание эконометрических особенностей различных тестов представлены в *Anderson, Breedon, Deacon, Derry, Murphy, 1996; Driffil, Psaradakis, Sola, 1997, Bekaert, Hodrick, Marshall, 1997, и Fisher, Gilles, 1998*.

Применительно к анализу временной структуры российского рынка ценных бумаг особо стоит выделить работы, посвященные проверке гипотезы ожиданий на развивающихся рынках (Аргентина – *Leiderman, Blejer, 1987; Мексика - Domowitz, Glen, Madhaven, 1998;* Россия – *Энтов, Радыгин, Мау, Синельников, Трофимов, Дробышевский, Луговой и др., 1998*). Исследования показали, что хотя чистая гипотеза ожиданий не оправдывается, предсказательная способность временной структуры процентных ставок на развивающихся рынках соответствует, в целом, результатам, полученным для развитых финансовых рынков, и текущие долгосрочные процентные ставки содержат информацию о будущих коротких ставках процента.

Отдельным направлением проверки гипотезы эффективности временной структуры является исследование возможности процентных ставок с различными сроками до погашения предсказывать будущие изменения инфляции, т.е. проверка гипотезы И. Фишера в отношении временной структуры. Практически все исследования в той или иной степени подтвердили справедливость данной гипотезы[11]. Необходимо отметить, что

[11] В качестве примера можно привести работы *Fama, 1975, 1990; Mishkin, 1981, 1990, 1993; Murphy, 1986; Barsky, 1987; Jorion, Mishkin, 1991; De Bondt, Bange, 1992; Svensson, 1994; Engsted, 1995; Estrella, Mishkin, 1995, 1997; Crowder, Hoffman, 1996; Kandel, Ofer, Sarig, 1996; Barr, Campbell,*

в большинстве исследований отмечалось различие в способности предсказывать инфляцию между краткосрочными и долгосрочными ставками. В большинстве случаев краткосрочные ставки не содержат информации о текущей и будущей инфляции, в то время как долгосрочные ставки предсказывают движение уровня цен достаточно хорошо.

Эмпирические исследования по оценке изменяющейся во времени премии за срок начались в середине 60-х годов. В 1965 году Кессель (*Kessel, 1965*) предположил, что величина премии зависит от текущего уровня краткосрочной процентной ставки. Оценки показали статистическую значимость и положительный знак такого рода зависимости. Однако Нельсон в 1972 году (*Nelson 1972*), оценивая спрэд между короткими и долгосрочными ставками, получил противоположный знак в регрессионном уравнении для коэффициента при текущей краткосрочной процентной ставке. Впоследствии авторы предлагали в своих работах различные макроэкономические и финансовые переменные, отвечающие за колебания и знак премии. В частности рассматривались циклы деловой активности (*Fama, Bliss, 1987; Harvey, 1988, 1993, 1997; Estrella, Hardouvelis, 1991; Hu, 1993; Plosser, Rouwenhorst, 1994; Clinton, 1995; Estrella, Mishkin, 1995, 1997, 1998; Alles, 1995; Chapman, 1997; Kamara, 1997; Kim, Limpaphayom, 1997; Berk, 1998*), ожидания дефицита государственного бюджета (*Plosser, 1987; Thomas, Abderrezak, 1988; Goff, 1990; Cebula, 1991; Lee, 1991; Correia-Nunes, Stemitsiotis, 1995*), ожидания изменения курса национальной валюты (*Svensson, 1994; Dahlquist, 1995*), ситуация на фондовом рынке (*Campbell, 1987; Wu, Lu, Lee, 1994; Fraser, 1995*), инструменты политики регулирования ставок (*Mankiw, Miron, 1986; Balduzzi, Bertola, Foresi, 1996*), информационные потоки (*Jones, Lamont, Lumsdaine, 1996*), международные взаимосвязи (*Bomhoff, Schotman, Grilli, Leiderman, 1988; Johnson, 1993; Kazemi, Warotamasikkhadit, Nageswaran, 1997*), изменение налогового режима (*Green,*

1996; Alles, Bhar, 1997; Lee, Clark, Ahn, 1998. Отрицательные результаты представлены в статьях *Evans, 1998; Crockett, 1998; Berk, 1998.*

Odergaard, 1997; Elton, Green, 1998), колебания денежного предложения (*Lynch, Ewing, 1998*), ликвидность рынка (спрэд между заявками на покупку и продажу) (*Shen, Starr, 1998; Elton, Green, 1998*), изменения странового риска и ожидания девальвации (*Domowitz, Glen, Madhaven 1998*), условные дисперсии процентных ставок (премии) (*Lee, 1989; Longstaff, 1990; Taylor, 1992; De Bondt, Bange, 1992; Engle, Ng, 1993; Heynen, Kemna, Vorst, 1994; Margaritis, 1994; Elton, Gruber, Mei, 1996; Mayfield, Murphy, 1996; Bhar, 1996; Ederington, Goh, 1997; Tzavalis, Wickens, 1997; Lyer, 1997*).

Эмпирические проверки гипотезы сегментации рынков менее распространены. Даффи (*Duffee, 1996*) и Бальдини и Керубини (*Baldini, Cherubini, 1998*) рассматривали значительно более высокую дисперсию колебаний краткосрочных ставок по, соответственно, американским и итальянским казначейским обязательствам в сравнении с долгосрочными ставками по облигациям как результат разделения рынков бумаг с коротким и длинным сроками до погашения. Парк и Свитцер (*Park, Switzer, 1997*) обнаружили возможность сегментации рынка, изучая методы технического прогнозирования доходности облигаций и производных финансовых инструментов. Напротив, Колеман, Фишер и Ибботсон (*Coleman, Fisher, Ibbotson, 1992*), сравнивая форвардные ставки по дисконтным и купонным ценным бумагам Казначейства США, не обнаружили значимых отличий между видами ценных бумаг и сроками до погашений.

* * *

Таким образом, в экономической теории существует пять основных гипотез временной структуры процентных ставок: гипотеза ожиданий, гипотеза предпочтения ликвидности, гипотеза об изменяющейся во времени премии за срок, гипотеза сегментация рынков и гипотеза "предпочитаемой среды". Как видно из представленного обзора, к настоящему времени практически преодолены противоречия между различными подходами к объяснению формы кривой доходности, и выбор конкретной гипотезы зависит от предпосылок, целей и результатов конкретного исследования.

Подробные обзоры истории развития и современного состояния гипотез временной структуры, а также результатов их эмпирических проверок можно найти в *Shiller, 1990; Taylor, 1992; Cuthbertson, 1996; Campbell, Lo, MacKinlay, 1997; Mishkin, 1997*.

3. Макроэкономические подходы

Макроэкономические подходы к анализу временной структуры процентных ставок направлены на изучение эффектов денежно-кредитной и фискальной политики в рамках стандартных макроэкономических теорий – неокейнсианства и неоклассики. Основное внимание уделяется различиям в реакции на действия государства в динамике краткосрочных и долгосрочных ставок. Такие модели не описывают движение всей кривой доходности, в них разделяются только краткосрочные и долгосрочные ставки.

Эмпирические проверки моделей временной структуры на основе макроэкономических подходов относятся к изучению факторов, влияющих на колебания премии за срок (см. выше). Анализ поведения временной структуры процентных ставок с точки зрения макроэкономической политики подробно представлен в *Blanchard, Fisher, 1989; Turnovski, 1995; Evans, Marshall, 1998; Goodfriend, 1998* и *Walsh, 1998*.

3.1. Неокейнсианская модель Бланшара

О. Бланшар (*Blanchard, 1981*) рассматривает неокейнсианскую модель закрытой экономики в рамках подхода IS-LM с постоянным объемом капитала. В такой экономике существует один вид блага и четыре вида рыночных активов: акции (представляют физический капитал), частные краткосрочные и долгосрочные облигации и деньги.

Равновесие на рынке товаров. Предположим, что существует три основных фактора, определяющих текущие потребительские расходы. Во-первых, изменение цен акций на фондовом рынке. Поскольку акции представляют собой часть богатства, изменение их стоимости влияет на текущее потребление, а соотношение их цены и восстановительной стоимости капитала корпораций – на инвестиционные решения (см. *Tobin, 1978*). Во-вторых, текущий доход, влияние которого в условиях ограничения на ликвидность не зависит от богатства. В-третьих, фискальная политика – как через государственные расходы, так и через налоги.

Таким образом, планируемые расходы могут быть выражены в следующем виде:

$$e = aq + \beta y + g, \quad \beta \in [0,1)$$

где e – планируемые расходы, q – капитализация фондового рынка, y – текущий доход, g –государственные расходы. Все величины даны в реальном выражении.

Объем выпуска и планируемые расходы со временем приходят в равновесие (σ – коэффициент "настройки"):

$$\dot{y} = \sigma(e - y) = \sigma(aq + by + g), \quad \sigma > 1, \quad b \equiv \beta - 1 < 0. \tag{3.1}$$

Из (3.1) следует, что, во-первых, до тех пор, пока выпуск не отреагировал на увеличение спроса, происходит изменение товарных запасов; во-вторых, хотя фактические текущие расходы всегда равны выпуску, планируемые расходы могут отличаться от текущего выпуска.

Равновесие на рынке финансовых активов. Все три неденежных актива рассматриваются как совершенные субституты. Следовательно, благодаря возможности арбитража и отсутствию риска они имеют одну и ту же доходность в краткосрочном периоде. Последняя, в свою очередь, должна быть такой, чтобы экономические агенты были согласны на имеющуюся долю денег в своих портфелях. Портфельный баланс характеризуется обычным соотношением LM:

$$m - p = \tilde{c}y - \tilde{h}i, \quad \tilde{c} > 0, \tilde{h} > 0,$$

или

$$i = cy - h(m - p), \qquad (3.2)$$

где i – краткосрочный номинальный процент, m и p – логарифмы номинальной денежной массы и уровня цен.

Краткосрочная реальная процентная ставка определяется как

$$r^* = i - \dot{p}^*, \qquad (3.3)$$

где звездочка обозначает ожидания, а $\dot{p}^*$ – ожидаемый уровень инфляции.

Арбитраж между краткосрочными и долгосрочными облигациями. Долгосрочные облигации представлены дисконтными ценными бумагами с доходностью I и ценой $1/I$. Ожидаемая доходность данного вида бумаг в краткосрочном периоде равна сумме доходности и ожидаемого номинального капитального прироста:

$$I\left(1 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{I}\right)\right) = I - \dot{I}^*/I.$$

Поскольку арбитраж допускается:

$$I - \dot{I}^*/I = i. \qquad (3.4)$$

Из уравнения (3.4) следует, что $\dot{I}^*/I = I - i$. Таким образом, если доходность долгосрочной облигации I выше доходности краткосрочной облигации i, инвесторам следует ожидать капитальных потерь по долгосрочной облигации, т. е. роста долгосрочной процентной ставки. Обозначим долгосрочную реальную ставку процента R и определим ее аналогично уравнению (3.4):

$$r^* = R - \dot{R}^*/R. \qquad (3.5)$$

Арбитраж между краткосрочными облигациями и акциями. Если q обозначает капитализацию фондового рынка в реальном выражении, ожидаемая реальная доходность от акций равна $\dot{q}^*/q + \pi/q$, где π – реальная прибыль корпораций. Последняя, в свою очередь, предполагается как возрастающая линейная функция от выпуска:

$$\begin{aligned} &\pi = \alpha_0 + \alpha_1 y \\ &\alpha_1 > 0 \end{aligned}.$$

Возможность арбитража между краткосрочными облигациями и акциями означает, что

$$\frac{\dot{q}^*}{q} + \frac{\alpha_0 + \alpha_1 y}{q} = r^*. \tag{3.6}$$

Уравнения (3.1) – (3.6) описывают выпуск, фондовый рынок и процентные ставки как функции от переменных, характеризующих экономическую политику, *m* и *g,* ожидания, $\dot{q}^*$ и $\dot{p}^*$, и уровень цен *p*. Данная система рекурсивна: долгосрочные ставки определяются уравнениями (3.4) и (3.5), но отсутствуют в других уравнениях. Связующим звеном между рынками финансовых активов и товаров является капитализация фондового рынка (согласно гипотезе Тобина; см. *Tobin, 1978*). Мы предполагаем, что ожидания экономических агентов рациональны, таким образом, для их описания нам достаточно одного уравнения, характеризующего динамику уровня цен *p*.

Решение системы для случая жестких цен. В предположении о жестких ценах отсутствует наблюдаемая и ожидаемая инфляция, номинальные и реальные процентные ставки равны, система сокращается до четырех уравнений (3.1), (3.2), (3.5), (3.6). При этом в уравнении (3.2) номинальная краткосрочная ставка заменяется реальной ставкой, временная структура процентных ставок описывается уравнением (3.5).

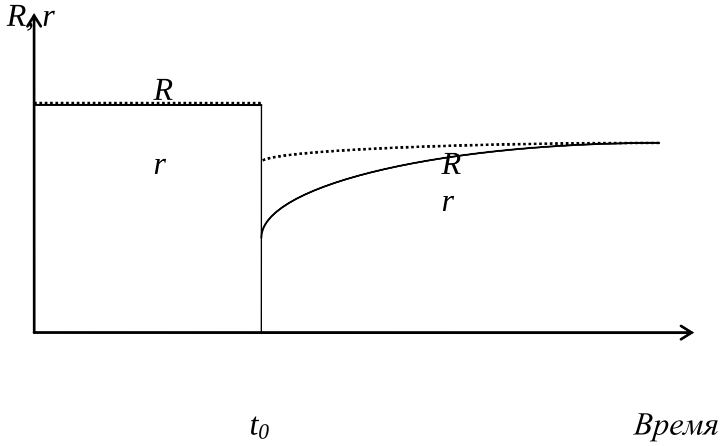
В устойчивом равновесном статическом состоянии $\dot{y} = 0$. Следовательно, выпуск, равный планируемым расходам, зависит от ситуации на фондовом рынке и уровня государственных расходов: $y = \frac{a}{b} q + \frac{1}{b} g$. Фондовый рынок (при $\dot{q} = \dot{q}^* = 0$) определяется как $q = \frac{\pi}{r} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 y}{cy - h(m - p)}$. Капитализация фондового рынка равна отношению прибыли в устойчивом равновесном состоянии к равновесной процентной ставке. Обе функции (прибыли и процента) являются возрастающими функциями от выпуска: прибыль прямо пропорциональна объему выпуска, а процент повышается благодаря росту трансакционного спроса на деньги при увеличении выпуска. Таким образом, влияние выпуска на фондовый рынок неоднозначно. Если обозначить значение капитализации фондового рынка в равновесном устойчивом состоянии как $\overline{q}$, то при $(c\overline{q} - \alpha_1)>0$ влияние процентной ставки будет доминировать и рост выпуска приведет к спаду на фондовом рынке. В противоположном случае ожидания прибыли преобладают, и рынок начнет расти с увеличением выпуска.

Мы не будем представлять фазовые диаграммы динамического решения и остановимся только на поведении временной структуры при изменениях переменных, характеризующих денежную и фискальную политику государства.

При увеличении денежной массы новое устойчивое равновесие будет характеризоваться более низким уровнем реальных процентных ставок, высоким уровнем выпуска и капитализацией фондового рынка. Это соответствует сравнительной статике обычной модели IS-LM. Однако динамика прихода в новое равновесное состояние будет зависеть от того, в какой мере экономические агенты предвидели данное увеличение денежной массы.

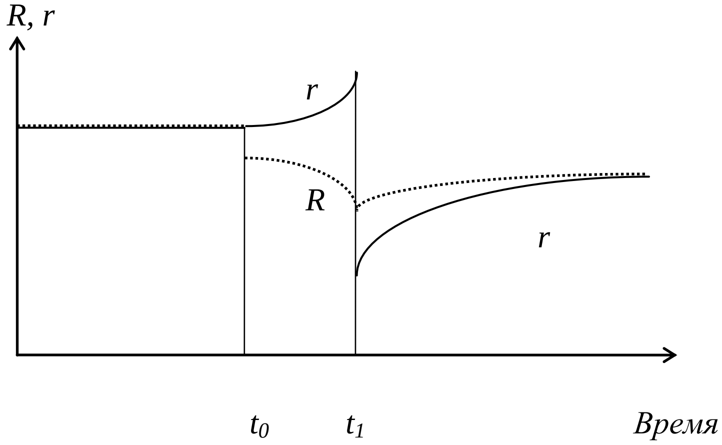
При непредвиденном расширении денежного предложения в момент t_0 краткосрочные процентные ставки резко упадут для поддержания новой доли денег в портфелях экономических агентов (см. рисунок 3.1). Долгосрочные ставки также упадут, однако они снизятся в меньшей степени, так как в будущем ожидается рост выпуска и, соответственно, рост спроса на деньги. Кривая доходности будет иметь положительный наклон. Через некоторое время объем выпуска и планируемые расходы придут в равновесие, краткосрочные и долгосрочные процентные ставки также сравняются на новом уровне, более низком, чем при предыдущем равновесии, но более высоком, чем первоначальный скачок ставок вниз в момент денежной экспансии.

Рисунок 3.1



При ожидаемом расширении денежной массы изменение кривой доходности будет отличным (см. рисунок 3.2). Допустим, что в момент t_0 было объявлено, что денежная масса увеличится в последующий момент t_1. Объявление об увеличении денежного предложения приведет к подъему фондового рынка в ожидании низких процентных ставок и роста прибыли. Увеличение стоимости акций вызовет рост расходов (благодаря эффекту богатства). Следовательно, выпуск начнет расти еще до фактического расширения денежного предложения. Однако, поскольку денежная масса еще не изменилась, краткосрочные процентные ставки увеличатся, в то время как долгосрочные ставки начнут понижаться в ожидании будущего снижения процента. В это время кривая доходности приобретает отрицательный наклон. После момента расширения денежной массы поведение всей временной структуры аналогично случаю непредвиденной денежной экспансии.

Рисунок 3.2.



Последствия увеличения государственных расходов в рамках данной модели также очевидны. Новое равновесное состояние будет характеризоваться увеличением выпуска, прибыли и уровня процентных ставок. Влияние на фондовый рынок не определено и зависит от соотношения роста выпуска (ведет к подъему рынка) и уровня процента (снижает цены акций).

Рассмотрим динамику изменения временной структуры для случая ожидаемого увеличения государственных расходов, поскольку это наиболее реалистичный сценарий проведения фискальной политики.

Здесь различаются два возможных варианта в зависимости от соотношения $(c\overline{q} - \alpha_1)$ в модели: 1) при доминирующем росте прибыли и подъеме фондового рынка (см. рисунок 3.3); 2) при доминирующем увеличении уровня процента и снижении цен акций (см. рисунок 3.4).

Рисунок 3.3

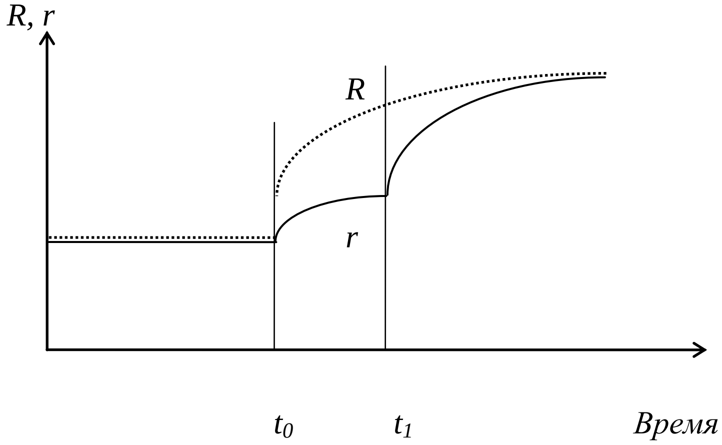
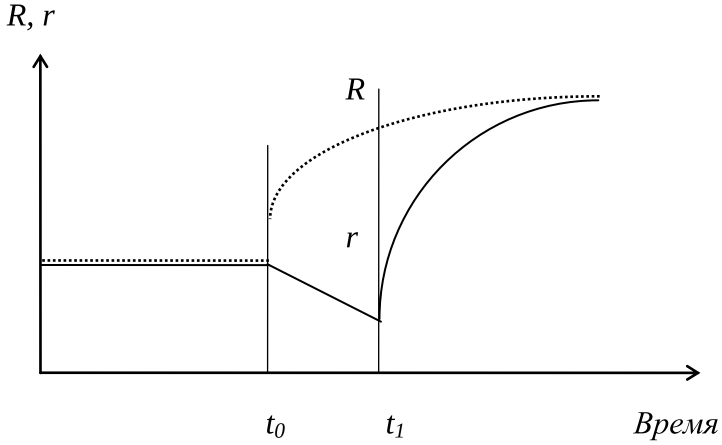


Рисунок 3.4



В первом случае ожидаемый рост прибыли перекрывает ожидания увеличения уровня процента, и капитализация фондового рынка растет. В свою очередь, ожидания увеличения выпуска и уровня процента приводят к скачку вверх долгосрочных процентных ставок, в то время как краткосрочные ставки медленно растут по мере увеличения спроса на деньги.

Во втором случае в момент объявления об увеличении государственных расходов фондовый рынок падает, поскольку эффект от ожидания роста процентных ставок превышает ожидания увеличения прибыли. В период времени между объявлением о намерениях и изменением фискальной политики выпуск снижается, так как частные расходы снизились в результате эффекта богатства (реакция на снижение стоимости акций), а государственные – остались пока без изменений. Спрос на деньги и краткосрочные процентные ставки падают до момента t_1. Долгосрочные ставки, однако, повышаются в ожидании будущего повышения уровня процента. После увеличения государственных расходов выпуск начинает расти, а вместе с ним – и краткосрочные ставки. Кривая доходности имеет положительный наклон на протяжении всего периода.

Решение для случая гибких цен. Если цены совершенно гибкие, то изменения номинального объема денежной массы будут нейтральны по отношению к выпуску и фондовому рынку. Уравнение цен в модели может быть записано в следующем виде:

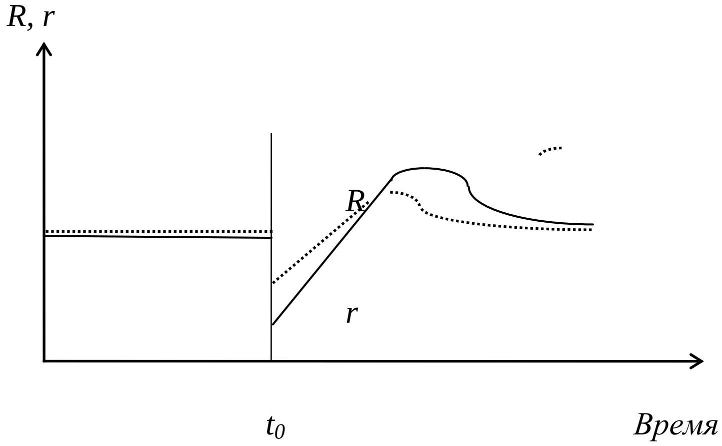
$$\begin{aligned}&\dot{p} = \dot{p}^* = \theta(\overline{p} - p)\\&\theta > 0\end{aligned}, \qquad (3.7)$$

где $\overline{p}$ – уровень цен при полной занятости и некотором номинальном объеме денежной массы $\overline{m}$. Такого рода процесс достижения равновесия означает, что в долгосрочном периоде, по мере того как цены достигают нового равновесного уровня, деньги нейтральны и, хотя рост цен равен ожидаемому, допущения об инерционности ожиданий или предопределенных контрактами ценах имеют место. Добавление в уравнение 3.7 отклонения безработицы от естественного уровня сделает его еще более близким к уравнению кривой Филлипса, однако в данной модели это не является важным, а только затруднит вычисления.

В устойчивом равновесном состоянии выпуск, реальные процентные ставки и фондовый рынок инвариантны по отношению к номинальной денежной массе. Изменение номинальной денежной массы приводит только к пропорциональному изменению уровня цен. Для анализа динамики изменения переменных рассмотрим случай непредвиденного увеличения денежного предложения.

При такой денежной экспансии реальные кассовые остатки возрастают в краткосрочном периоде, так как среагировать мгновенно цены не успевают, номинальные процентные ставки снижаются. Реальные процентные ставки падают из-за роста ожиданий инфляции (эффект Манделла). В период до установления нового уровня цен выпуск расширяется, превышая равновесный уровень. Реальные ставки процента после первоначального падения поднимаются выше равновесного уровня благодаря снижению реальных кассовых остатков, росту трансакционного спроса на деньги, снижению инфляционных ожиданий. В результате долгосрочные реальные процентные ставки снижаются в меньшей степени, чем краткосрочные, кривая доходности имеет положительный наклон (см. рисунок 3.5). Со временем временная структура становится более пологой и достигает отрицательного наклона.

Рисунок 3.5



3.2. Неокейнсианские модели Турновски-Миллера и Маккафферти

С.Турновски и М.Миллер (*Turnovsky, Miller, 1984*) рассматривают неокейнсианскую модель закрытой экономики, аналогичную модели Бланшара. Отличие заключается в том, что авторы включают в модель рынок государственных, а не частных облигаций, исключив из рассмотрения фондовый рынок. Такая постановка задачи позволяет изучить влияние на временную структуру процентных ставок со стороны увеличения государственных расходов, осуществляемого за счет денежной экспансии, или расширения заимствований на финансовом рынке (выпуска государственных облигаций).

В случае финансирования дефицита государственного бюджета за счет увеличения предложения денег результаты полностью повторяют выводы Бланшара о поведении временной структуры процентных ставок при денежной экспансии (с жесткими ценами).

Если увеличение государственных расходов финансируется за счет выпуска облигаций, то, в соответствии с данной моделью, вид кривой доходности не изменится, краткосрочные и долгосрочные ставки будут одновременно подниматься до нового равновесного уровня.

Маккафферти (*McCafferty, 1986*), также в рамках неокейнсианского подхода, рассматривает влияние совокупного спроса на колебания доходности облигаций с разным сроком до погашения. В данной модели предполагается, что рынок товаров и денежный рынок приводятся в равновесие различными ставками процента (в рамках подхода IS-LM). Совокупный спрос на товары зависит от долгосрочной ставки процента, в то время как спрос на деньги определяется краткосрочными ставками. Кроме этого, модель Маккафферти допускала стохастический характер изменения цен облигаций, в то время как модели Бланшара и Турновски-Миллера были полностью детерминистские[12].

Автор показывает, что, несмотря на то, что на разных рынках действуют различные ставки процента, колебания краткосрочных ставок под воздействием шоков денежного предложения оказывают влияние на дисперсию долгосрочных

---

[12] Маскаро и Мельтцер (*Mascaro, Meltzer, 1983*) ввели в свою модель, аналогичную модели Бланшара, риск как экзогенный параметр, тем не менее их анализ остался полностью детерминистским.

процентных ставок и, таким образом, влияют на инвестиционные решения и уровень потребления. В тоже время спекулятивный спрос на активы, включая краткосрочные облигации, определяется колебаниями долгосрочных процентных ставок.

Модель Маккафферти стала прообразом нового класса макроэкономических подходов к изучению временной структуры процентных ставок, рассмотренному ниже.

3.3. Неоклассическая модель Турновски

Модель С. Турновски (*Turnovsky, 1989*) является неоклассической стохастической макроэкономической моделью временной структуры. Она состоит из пяти уравнений:

$$y_t = -\delta R_t + g_t \qquad \delta > 0 \tag{3.8}$$

$$m_t - p_t = \alpha_1 y_t - \alpha_2 i_t \qquad \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0 \tag{3.9}$$

$$y_t = \gamma(p_t - p_{t,t-1}{*}) \qquad \gamma > 0 \tag{3.10}$$

$$r_t = i_t - (p_{t+1,t}{*} - p_t) \tag{3.11}$$

$$r_t = R_t - \frac{1}{\eta}(R_{t+1,t}{*} - R_t), \tag{3.12}$$

где y_t –отклонение реального объема выпуска от естественного уровня (в логарифмах); R_t – долгосрочная реальная процентная ставка; i_t – краткосрочная номинальная процентная ставка; r_t – краткосрочная реальная процентная ставка; g_t – реальные государственные расходы (в логарифмах); p_t – уровень цен производителей (в логарифмах); $p_{t+i,t}{*}$ –ожидания в момент t цен в периоде $t+i$, $i = 1, 2, 3,...$; m_t – номинальная денежная масса (в логарифмах).

Уравнение (3.8) представляет, фактически, кривую IS, где в качестве процента взята долгосрочная процентная ставка. Это означает, что инвестиции, являющиеся частью общих расходов, определяются долгосрочной ставкой процента. Равновесие на денежном рынке описывается уравнением (3.9), где спрос на деньги зависит от краткосрочной процентной ставки. Уравнение (3.10) описывает общий выпуск в виде функции предложения Лукаса, т. е. отклонение выпуска от естественного уровня зависит от непредвиденного изменения уровня цен. Уравнения (3.11) представляет обычное соотношение между реальными и номинальными краткосрочными процентными ставками в предположении о нейтральности инвесторов по отношению к риску. Временная структура процентных ставок описывается уравнением (3.12). Здесь долгосрочная процентная ставка определяется как доходность долгосрочной облигации, обеспечивающей реальный купонный платеж, равный единице, в течение всего срока до погашения. Таким образом, цена данной облигации равна $\frac{1}{R}$. Уравнение (3.12) является линейной аппроксимацией модели CAPM для рынка ценных бумаг с различными сроками до погашения. В предположении о нейтральности инвесторов по отношению к риску параметр η равен средней долгосрочной реальной ставке $\overline{R}$[13].

Система уравнений (3.8) – (3.12) определяет совместно пять переменных: выпуск, долгосрочную и краткосрочную реальные процентные ставки, краткосрочную номинальную процентную ставку и уровень цен. Устойчивое состояние экономики (когда все ожидания реализованы и не изменяются) характеризуется следующими соотношениями (I обозначает долгосрочную номинальную процентную ставку):

---

[13] Если инвесторы не являются нейтральными по отношению к риску, то параметр $\eta = \overline{R} + k\sigma_R^2$, где k – отражает степень неприятия риска, а σ_R^2 – дисперсия долгосрочной реальной ставки. Однако если экономика находится в стабильном состоянии, то дисперсия долгосрочной реальной ставки не изменяется, и мы можем рассматривать параметр η постоянным и в этом случае.

$$\bar{y} = 0$$

$$\overline{R} = \bar{r} = \bar{I} = \bar{i} = \frac{g}{\delta}.$$

$$\bar{p} = m + \alpha_2 \frac{g}{\delta}$$

Таким образом, в долгосрочном периоде все процентные ставки равны и определяются только уровнем государственных расходов. Уровень цен пропорционален объему денежной массы и также зависит от объема государственных расходов.

Решение модели. Для экономии места здесь представлены только итоговые выражения для процентных ставок, полученные в результате решения системы уравнений (3.8) – (3.12) [14]:

1) Долгосрочная реальная процентная ставка.

$$R_t = R_{t,t-1}* + \frac{1}{D}[-\gamma(m_t - m_{t,t-1}*) + (1 + \alpha_2 + \alpha_1\gamma)(g_t - g_{t,t-1}*) -$$

$$- \gamma \sum_{k=1}^{\infty} (m_{t+k,t}* - m_{t+k,t-1}*)\left(\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}\right)^k + \frac{\gamma(1-\alpha_2\eta)}{\delta\eta} \sum_{k=1}^{\infty} (g_{t+k,t}* - g_{t+k,t-1}*)\left(\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}\right)^k]$$

$$R_{t,t-1}* = \frac{g_{t,t-1}*}{\delta}$$

$$D = \delta(1 + \alpha_2 + \alpha_1\gamma) + \gamma\alpha_2\left(1 + \frac{1}{\eta}\right) > 0$$

.

2) Краткосрочная реальная процентная ставка.

[14] Для решения системы в первую очередь определяются ожидания переменных на один период вперед, после чего ожидания вычитаются из первоначальных уравнений. Итоговое решение находится для матричного уравнения, состоящего из полученных разностей.

$$r_t = r_{t,t-1}* + \frac{\left(1+\frac{1}{\eta}\right)}{D}[-\gamma(m_t - m_{t,t-1}*) + (1+\alpha_2+\alpha_1\gamma)(g_t - g_{t,t-1}*) -$$

$$-\gamma\sum_{k=1}^{\infty}(m_{t+k,t}* - m_{t+k,t-1}*)\left(\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}\right)^k + \frac{\gamma(1-\alpha_2\eta)}{\delta\eta}\sum_{k=1}^{\infty}(g_{t+k,t}* - g_{t+k,t-1}*)\left(\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}\right)^k]-$$

$$-\frac{1}{\delta\eta}(g_{t+1,t}* - g_{t+1,t-1}*)$$

$$r_{t,t-1}* = \frac{1}{\delta}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)g_{t,t-1}* - \frac{1}{\delta\eta}g_{t+1,t-1}*$$

$$D = \delta(1+\alpha_2+\alpha_1\gamma) + \gamma\alpha_2\left(1+\frac{1}{\eta}\right) > 0$$

.

3) Краткосрочная номинальная процентная ставка.

$$i_t = i_{t,t-1}* + \frac{1}{D}[-[\gamma\left(1+\frac{1}{\eta}\right)+\delta](m_t - m_{t,t-1}*) + \left(1+\frac{1}{\eta}\right)(1+\alpha_1\gamma)(g_t - g_{t,t-1}*) +$$

$$+\frac{\delta}{\alpha_2}(1+\alpha_1\gamma)\sum_{k=1}^{\infty}(m_{t+k,t}* - m_{t+k,t-1}*)\left(\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}\right)^k +$$

$$+\frac{(1+\alpha_1\gamma)(\alpha_2\eta-1)}{\alpha_2\eta}\sum_{k=1}^{\infty}(g_{t+k,t}* - g_{t+k,t-1}*)\left(\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}\right)^k]$$

$$i_{t,t-1}* = -\left(\frac{1}{1+\alpha_2}\right)m_{t,t-1}* + \frac{1}{\delta(1+\alpha_2)}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)g_{t,t-1}* + \frac{1}{\alpha_2(1+\alpha_2)}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{\infty}m_{t+k,t-1}*\left(\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}\right)^k + \left(\frac{\alpha_2\eta-1}{\delta\eta}\right)\sum_{k=1}^{\infty}g_{t+k,t-1}*\left(\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}\right)^k\right]$$

$$D = \delta(1+\alpha_2+\alpha_1\gamma) + \gamma\alpha_2\left(1+\frac{1}{\eta}\right) > 0$$

.

4) Долгосрочная номинальная процентная ставка.

$$I_t = I_{t,t-1}* + \frac{\overline{R}}{1+\overline{R}}\left[(i_t - i_{t,t-1}*) + \sum_{j=1}^{\infty}(i_{t+j,t}* - i_{t+j,t-1}*)\left(\frac{1}{1+\overline{R}}\right)^j\right]$$

$$I_{t,t-1}* = \frac{\overline{R}}{1+\overline{R}}\sum_{j=0}^{\infty} i_{t+j,t-1}*\left(\frac{1}{1+\overline{R}}\right)^j$$

$$i_{t+j,t} = -\frac{1}{1+\alpha_2}m_{t+j,t} + \frac{1}{\delta(1+\alpha_2)}\left(1+\frac{1}{\eta}\right)g_{t+j,t} + \frac{1}{\alpha_2(1+\alpha_2)}\times$$

$$\times\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left[m_{t+j+k,t}* + \left(\frac{\alpha_2\eta-1}{\delta\eta}\right)g_{t+j+k,t}*\right]\left(\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}\right)^k\right\}$$

Далее приводится исследование полученного решения для различных типов возмущений со стороны переменных, характеризующих экономическую политику (денежное предложение и государственные расходы).

Непредвиденное расширение денежного предложения (временное или постоянное) приведет к снижению как краткосрочных, так и долгосрочных реальных процентных ставок, однако влияние на последние будет сильнее в $(1+\frac{1}{\eta})$ раз. Номинальные ставки также понизятся, причем долгосрочные номинальные ставки понизятся в $(1+\frac{1}{\overline{R}})$ раз больше. Непредвиденное временное увеличение денежной массы вызывает большее снижение краткосрочных номинальных, чем краткосрочных реальных, процентных ставок. Это же справедливо и для долгосрочных процентных ставок в случае, если инвесторы нейтральны по отношению к риску (если инвесторы не нейтральны, данное условие может не выполняться). Непредвиденное постоянное увеличение денежного предложения вызывает большее снижение реальных ставок по сравнению с номинальными для всех сроков. Непредвиденная временная денежная экспансия понижает в большей степени номинальные процентные ставки, чем постоянная, но реальные процентные ставки снижаются меньше, чем это имело бы место при непредвиденном постоянном увеличении денежной массы.

Поскольку ожидаемые значения реальных процентных ставок зависят только от государственных расходов и не зависят от номинальной денежной массы, реакция реальных процентных ставок на *ожидаемое расширение денежного предложения* будет такой же, как и для случая непредвиденной денежной экспансии. Кроме того, ожидаемое постоянное увеличение денежной массы ведет к пропорциональному увеличению ожидаемого уровня цен, и реальная денежная масса не изменяется; ожидания номинальной краткосрочной ставки также не меняются. Ожидаемая долгосрочная номинальная процентная ставка есть дисконтированная сумма ожидаемых краткосрочных номинальных ставок и, следовательно, остается постоянной. С другой стороны, временное ожидаемое расширение денежного предложения понижает ожидаемую номинальную краткосрочную ставку, и номинальная краткосрочная ставка падает даже больше, чем при неожиданной денежной экспансии. Аналогичная ситуация наблюдается и для номинальной долгосрочной ставки.

Непредвиденное временное увеличение государственных расходов ведет к росту краткосрочных и долгосрочных реальных процентных ставок. Последние повышаются в $(1+\frac{1}{\eta})$ раза сильнее. Номинальные краткосрочные и долгосрочные ставки также возрастают, при этом долгосрочные ставки – в $(1+\frac{1}{\overline{R}})$ раз больше.

При предположении, что эластичность спроса на деньги по проценту $\alpha_2\eta<1$, непредвиденное постоянное увеличение государственных расходов вызывает рост долгосрочных реальных ставок на величину, большую чем повышение краткосрочных реальных ставок. Реакция краткосрочных реальных ставок, в общем случае, не является однозначной, и при определенных условиях они могут упасть. Непредвиденное постоянное увеличение государственных расходов повышает как долгосрочные, так и краткосрочные (в большей степени) номинальные процентные ставки.

Непредвиденное временное увеличение государственных расходов оказывает более сильное влияние на реальные, чем на номинальные ставки, в то время как постоянное – на номинальные. При условии, что $\alpha_2 \eta < 1$, непредвиденное временное увеличение государственных расходов сильнее влияет на краткосрочные ставки, чем постоянное. Для долгосрочных ставок ситуация обратная: они в большей степени подвержены влиянию непредвиденного постоянного роста государственных расходов, чем в ситуации, когда такой рост временный.

Ожидаемое постоянное увеличение государственных расходов повышает все ожидаемые ставки на одну и туже величину: $\frac{1}{\delta}$. Поскольку ожидаемая долгосрочная реальная ставка зависит только от текущих государственных расходов, ее реакция не зависит от того, является ли увеличение временным или постоянным. Ожидаемая краткосрочная реальная ставка возрастает в ответ на временное увеличение расходов в $\frac{1}{\delta}(1+\frac{1}{\eta})$ раз. Ожидаемый рост краткосрочной номинальной ставки зависит от ожиданий уровня цен. Отклик последнего в случае временного увеличения государственных расходов будет выше по сравнению с постоянным ростом расходов только при условии $\alpha_2 \eta < 1$.

Относительная дисперсия процентных ставок. Если представить стохастический процесс динамики процентных ставок как линейную комбинацию трех видов возмущений: временный денежный шок, постоянный денежный шок, временный фискальный шок, то относительная дисперсия долгосрочных и краткосрочных реальных ставок будет равна

$$\frac{\sigma_R^2}{\sigma_r^2} = \frac{1}{(1+ {}^{1}\!/_{\eta})^2},$$

а соответствующая относительная дисперсия номинальных ставок

$$\frac{\sigma_I^2}{\sigma_i^2} = \frac{1}{(1 + 1/\overline{R})^2}\ .$$

При условии нейтральности инвесторов по отношению к риску $\eta = \overline{R}$ эти два выражения совпадают. В диапазоне фактических значений долгосрочных равновесных ставок для развитых экономик (0 – 15%) дисперсия долгосрочных ставок составляет малую долю дисперсии краткосрочных ставок. Если же инвесторы не приемлют риск, то, при стремлении параметра, отвечающего за неприятие риска, к бесконечности, отношение дисперсий стремится к единице.

Если же мы допускаем, что имеют место только фискальные шоки, выражения для относительной дисперсии номинальных и реальных ставок усложняются, и возможна ситуация, при которой дисперсия долгосрочных ставок превосходит дисперсию краткосрочных ставок.

* * *

Следующие три класса моделей временной структуры процентных ставок рассматривают движения цен облигаций с различными сроками до погашения как динамику цен финансовых активов, представленную в виде стохастического процесса, и не предназначены для целей анализа макроэкономических последствий различных вариантов денежно-кредитной и фискальной политики. Краткий обзор основных видов и свойств стохастических процессов и теории стохастических дифференциальных уравнений приведен в Приложении.

4. Факторные стохастические модели

Стохастические методы изучения цен финансовых активов получили широкое распространение после опубликования в 1973 году работ Блэка, Шоулза и Мертона по ценообразованию на опционы (*Black, Scholes, 1973; Merton, 1973*). В последующие несколько лет представление о случайном характере формирования цен финансовых активов стало преобладающим среди экономистов, изучающих финансовые рынки.

Применительно к теории временной структуры процентных ставок можно выделить три группы стохастических моделей: факторные модели, модели общего равновесия и модели с отсутствием арбитража. Основное отличие между этими группами заключается в предпосылке о том, выступают ли доходности облигаций с различными сроками до погашения в качестве эндогенной переменной, либо они считаются экзогенно заданными. Дальнейшее построение теоретической модели и эмпирические проверки ее адекватности наблюдаемым данным основываются на принимаемой предпосылке.

Основной целью построения факторных стохастических моделей является объяснение динамики процентных ставок ценных бумаг с различными сроками до погашения. В качестве исходного пункта для построения таких моделей задаются один или несколько случайных факторов, объясняющих поведение краткосрочных процентных ставок. Общепринятым термином для обозначения краткосрочных процентных ставок во всех факторных стохастических моделях (также как в моделях общего равновесия и моделях с отсутствием арбитража) является "*спот-ставка*". Далее принятый стохастический процесс специфицируется таким образом, чтобы соответствовать фактической временной структуре. Следующий шаг состоит в получении условия равновесия, которое предполагает возможность безрискового арбитража, и определении премии за срок в зависимости от случайного фактора. На основе факторной модели строится дифференциальное уравнение цены облигации в частных производных, имеющее аналитическое решение.

Факторные стохастические модели временной структуры процентных ставок начали свое развитие в 1976 году. В июле этого года была опубликована статья Кокса и Росса (*Cox, Ross, 1976*), посвященная альтернативным (по отношению к модели Блэка–Шоулза) методам стохастического моделирования цен опционов. Авторы впервые упомянули о возможности применения стохастических моделей формирования цены финансового актива для изучения динамики цен облигаций, хотя и не предложили формальной модели. Основополагающей работой в данном направлении считается статья О. Васичека 1977 года (*Vasicek, 1977*).

4.1. Однофакторная модель Васичека

Васичек (*Vasicek, 1977*) рассматривает рынок дисконтных облигаций, которые могут быть свободно куплены и проданы по рыночной цене. Риск дефолта по облигациям отсутствует. Цена облигации с датой погашения T в любой момент времени t обозначается $p(t, T)$. В момент погашения цена облигации равна единице, т. е. $p(T, T) = 1$. Доходность к погашению равна $R(t,m) = -\dfrac{\ln p(t,m)}{m}$, где $m = T - t > 0$ – срок обращения облигации. $R(t,m)$ как функция от m представляет временную структуру процентных ставок на момент t. Спот-ставка определяется как мгновенная процентная ставка для заимодателя и заемщика:

$$r(t) = R(t,0) = \lim_{m \to 0} R(t,m).$$

Принимаются следующие три предпосылки:

1. *Движение спот-ставки соответствует непрерывному Марковскому (диффузионному) процессу*. Рассматривается случай, когда спот-ставка определяется процессом с возвращением к среднему (процессом Орнстейна-Уленбека):

$$\begin{aligned} &dr = \alpha(\gamma - r)dt + \sigma dz \\ &\alpha > 0 \end{aligned}, \qquad (4.1)$$

где γ – долгосрочное среднее значение спот-ставки, $z(t)$ – Винеровский процесс. Такой процесс имеет стационарное распределение. Параметр дисперсии постоянен и равен σ. Параметр дрейфа α характеризует скорость возвращения процесса к долгосрочному среднему значению, пропорциональную отклонению текущего значения спот-ставки от среднего $(\gamma - r)$.

Условные математическое ожидание спот-ставки и дисперсия в момент времени t равны:

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_t r = \gamma + [r(t) - \gamma]e^{-\alpha(T-t)} \\ &D_t r = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha(T-t)}) \end{aligned}.$$

2. Цена дисконтной облигации p(t, T) на протяжение всего срока до погашения определяется оценкой в момент времени t участка стохастического процесса спот-ставки $\{r(\tau), t \le \tau \le T\}$. Необходимо отметить, что все гипотезы временной структуры (ожиданий, предпочтения ликвидности, сегментации рынка и "предпочитаемой среды") соответствуют предположению (2), поскольку они принимают временную структуру в виде $R(t,m) = \mathrm{E}_t\left(\frac{1}{T}\int_t^{t+m} r(\tau)d\tau\right) + \Phi[t,m,r(t)]$ с различными видами функции $\Phi[t,m,r(t)]$.

3. Рынок эффективен. Это означает, что информация доступна всем инвесторам в равной степени и все инвесторы действуют рационально (предпочитают более высокий уровень богатства меньшему, используют всю доступную информацию). Трансакционные издержки отсутствуют. Таким обра-

зом, инвесторы имеют одинаковые ожидания, и невозможен безрисковый арбитраж, дающий прибыль.

Согласно предположению (1), приращения спот-ставки на временном интервале (t, T) зависят только от текущего уровня спот-ставки, $r(t)$. Следовательно, из предположения (2) следует, что цена облигации является функцией от спот-ставки:

$$p(t,T) = p[t,T,r(t)].$$

Значение спот-ставки является единственной переменной состояния (фактором), определяющим временную структуру. Ожидания формируются на основе знания о всей предыдущей динамике всех доходностей к погашению, включая текущую кривую доходности. В силу предположения об эффективности это эквивалентно тому, что условные ожидания формируются на основе текущего значения спот-ставки. Поскольку мы рассматриваем только одну переменную состояния, мгновенные доходности облигаций с разными сроками до погашения коррелированы. Таким образом, нам достаточно двух облигаций (краткосрочной и любой другой) для описания всей временной структуры процентных ставок. Тем не менее, на любом конечном отрезке времени доходности от держания облигаций не корррелированы, и те инвесторы, которые не хотят непрерывно пересматривать свой портфель облигаций, должны иметь для достижения своих целей набор облигаций с разными сроками до погашения.

Поскольку цена облигации является функцией от спот-ставки, заданной стохастическим процессом (4.1), для нахождения темпа ее прироста $\dot{p}/p$ необходимо применить правила дифференцирования согласно лемме Ито. Таким образом, динамика цены облигации, $p(t,T,r)$, соответствует стохастическому дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + [\alpha(\gamma - r) + \sigma\lambda]\frac{\partial p}{\partial r} + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - rp = 0, \qquad (4.2)$$

$$t \le T$$

где $\lambda = \lambda(r,t)$ – рыночная цена риска, определяемая из условия отсутствия арбитража при формировании портфеля облигаций с разными сроками до погашения. Для заданной рыночной цены риска решение уравнения (4.2) находится при ограничении $p(T,T,r) = 1$.

Решение уравнения (4.2) записывается в следующем виде:

$$p(t,T,r) = \exp\left[\frac{1}{\alpha}[1-e^{-\alpha(T-t)}][R(\infty)-r]-(T-t)R(\infty)-\frac{\sigma^2}{4\alpha^3}[1-e^{-\alpha(T-t)}]^2\right]$$

$$R(\infty) = \gamma + \frac{\sigma\lambda}{\alpha} - \tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\alpha^2}$$

$$t \le T \qquad .(4.3)$$

Математическое ожидание и стандартное отклонение мгновенной доходности от держания облигации с датой погашения T равны

$$\mathrm{E}h(t,T) = r(t) + \frac{\sigma\lambda}{\alpha}[1-e^{-\alpha(T-t)}]$$

$$Dh(t,T) = \frac{\sigma}{\alpha}[1-e^{-\alpha(T-t)}] \quad .$$

$$t \le T$$

Таким образом, чем длиннее срок до погашения облигации, тем больше дисперсия мгновенной доходности от держания, а превышение ее математического ожидания над спот-ставкой пропорционально стандартному отклонению.

Уравнение временной структуры процентных ставок принимает следующий вид:

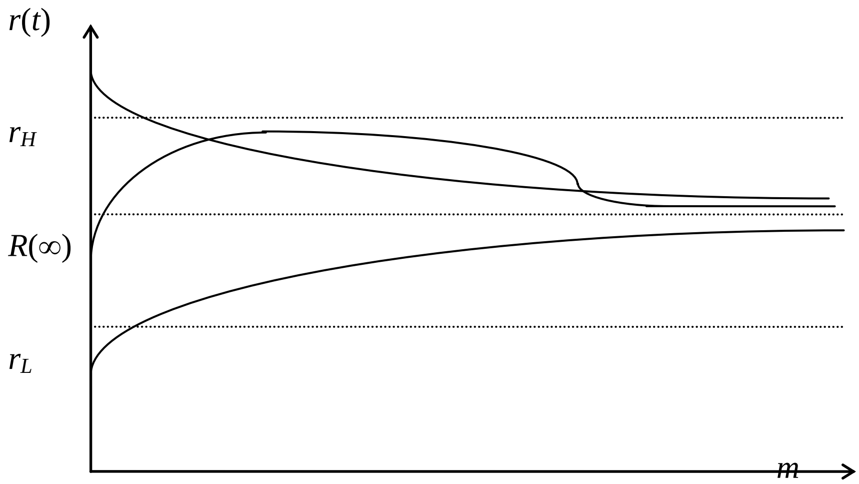
$$R(t,m) = R(\infty) + [r(t) - R(\infty)]\frac{1}{\alpha m}(1-e^{-\alpha m}) + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3 m}(1-e^{-\alpha m})^2 .$$

$$m \ge 0 \qquad (4.4)$$

Согласно уравнению (4.4) кривая доходности начинается в точке m = 0 с уровня, равного $r(t)$, и приближается к асимптоте

$R(\infty)$ при $m \to \infty$. При значениях $r(t)$, меньших или равных $R(\infty) - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{\alpha^2}$ (r_L, рис. 4.1), кривая доходности монотонно возрастает. При значениях $r(t)$, больших $R(\infty) - \frac{1}{4}\frac{\sigma^2}{\alpha^2}$ (r_H, рис. 4.1), но меньших $R(\infty) + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\alpha^2}$, она имеет "горб". Если $r(t)$ равно или больше $R(\infty) + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\alpha^2}$, кривая доходности монотонно убывает.

Рисунок 4.1



Уравнения (4.1) и (4.4) полностью описывают поведение процентных ставок при принятых предпосылках. Они позволяют вычислить доходности облигаций с разными сроками до погашения в любой момент времени, а также динамику изменения цены облигации на всем сроке до погашения. Кроме того, уравнение (4.4) описывает динамику доходности облигации с заданным сроком до погашения на рассматриваемом интервале времени. Так как спот-ставка распределена нормально (свойство процесса Орнстейна-Уленбека), а временная структура является линейной функцией от спот-ставки, процентные ставки ценных бумаг с разными сроками до погашения также распределены нормально.

Разность между форвардной ставкой и ожидаемой спот-ставкой (премия за срок) не зависит от t, и является функцией только от срока до погашения:

$$\Phi_f(t,m) = F(t,t+m) - \mathrm{E}_t r(t+m) = \left(R(\infty) - \gamma + \tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\alpha^2}e^{-\alpha m}\right)(1-e^{-\alpha m}) \equiv \Phi(m).$$

$m \geq 0$

Нетрудно заметить, что при $m = 0$, $\Phi(0) = 0$, при $T = \infty, \Phi(\infty) = R(\infty) - \gamma$. Поскольку $R(\infty)$ зависит от рыночной цены риска (4.3), то функция премии за срок может возрастать или убывать при различных величинах λ. Если рыночная цена риска $\lambda \geq \dfrac{\sigma}{\alpha}$, то $\Phi(m)$ – монотонно возрастающая функция от m. В пределах $0 < \lambda < \dfrac{\sigma}{\alpha}$ функция премии за срок является вогнутой с максимумом $\dfrac{\sigma^2}{2}$, достигаемого для срока до погашения $m = \dfrac{1}{\alpha}\ln\left(\dfrac{\sigma/\alpha}{\sigma/\alpha - \lambda}\right)$. При рыночной цене риска $\lambda \leq 0$ премия за срок монотонно убывает.

4.2. Однофакторные модели Дотана и Кокса-Ингерсолла-Росса

В модели Дотана (*Dothan, 1978*) в качестве фактора также принимается краткосрочная безрисковая спот-ставка, однако ее динамика представлена в виде геометрического Винеровского процесса без сдвига (аналогично модели ценообразования опционов Мертона, *Merton, 1973*):

$$dr = \sigma r dz,$$

где σ – константа, dz – Винеровский процесс. В отличие от модели Васичека такая запись предполагает логнормальное распределение спот-ставки, т. е. спот-ставка всегда положительная (модель Васичека допускала отрицательные значения спот-ставки). Однако у Дотана отсутствует член, отвечающий за "возвращение к среднему", в то время как в реальности наблюдается цикличность изменения процентных ставок. Дифференциальное уравнение цены облигации для условия отсутствия арбитража:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 r^2 \frac{\partial^2 p}{\partial p^2} - \sigma^2 \gamma r \frac{\partial p}{\partial r} - rp - \frac{\partial p}{\partial t} = 0$$

$$\gamma = \frac{\lambda}{\sigma}.$$

Рыночная цена риска (λ) принимается в модели потоянной, т. е. не зависит от времени, уровня спот-ставки. Решение уравнения для цены $p(r,\ t)$ находится при начальном и краевых ограничениях

$$\begin{gathered} p(r,0) = 1 \\ p(0,t) = 1 \\ p(\infty,t) = 0, t > 0 \end{gathered},$$

и записывается в следующем виде:

$$p(r,t) = \frac{1}{\pi^2} x^u \int_0^\infty \sin(2x^{\frac{1}{2}} \sin ha) \int_0^\infty \exp[-(4u^2 + \mu^2)s/4] \times$$

$$\times \mu \cos h \frac{\pi\mu}{2} \left| \Gamma\left(-u + i\frac{\mu}{2}\right) \right|^2 \sin(\mu a) d\mu da + \frac{2}{\Gamma(2u)} x^u K_{2u}(2\sqrt{x})$$

$$x = \frac{2}{\sigma^2} r$$

$$s = \frac{\sigma^2}{2} t$$

$$u = \tfrac{1}{2} + \gamma.$$

Как показано Дотаном, цена облигации является убывающей выпуклой функцией от спот-ставки и времени, возрастающей вогнутой функцией от σ^2. Временная структура процентных ставок является монотонно убывающей функцией в любой момент времени *t*. Кроме того, доходность к погашению является возрастающей вогнутой функцией от спот-ставки и убывающей выпуклой функцией от σ^2.

В 1980 г. Кокс, Ингерсолл и Росс опубликовали совместную работу по анализу займов с колеблющейся процентной ставкой (*Cox, Ingersoll, Ross, 1980*). Авторы рассмотрели модифицированную модель Мертона (*Merton, 1973*) для сравнения динамики цен безрисковых займов с переменной ставкой процента и займов с риском дефолта и показали, что единственное решение стохастического уравнения может быть найдено в обоих случаях.

В их модели поведение переменной состояния (безрисковой спот-ставки) описывается следующим стохастическим процессом:

$$dr = \sigma r^{3/2} dz ,$$

а рыночная цена риска определяется как $\lambda(r,t) = \lambda r^2$, где λ – константа.

Дифференциальное уравнение цены актива представлено в следующем виде:

$$\tfrac{1}{2}\sigma^2 r^3 \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} - \lambda r^2 \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} + c(r,t) - rp = 0,$$

где $c(r,t)$ – функция дополнительных денежных потоков, связанных с данным активом (напр., купонные платежи или дивиденды). Далее рассматривается несколько случаев функции $c(r,t)$: для облигаций с постоянным купонным доходом, для облигаций с обеспечением, с переменной купонной ставкой, конвертируемых облигаций, облигаций с гарантированным минимумом и максимумом купонной ставки, с риском дефолта.

4.3. Двухфакторные модели Бреннана-Шварца и Шефера-Шварца

В 1978 году Ричард (*Richard, 1978*) рассмотрел возможность применения формулы Блэка-Шоулза (*Black, Scholes, 1973*) для моделирования временной доходности облигаций в случае двух факторов. Ричард ввел второе уравнение состояния, описывающее динамику инфляции, разделив тем самым номинальные и реальные процентные ставки. Его модель стала первой в классе многофакторных моделей временной структуры процентных ставок. Развитие многофакторных (двухфакторных) моделей связано также с работой Бреннана и Шварца (*Brennan, Schwartz, 1982*).

Бреннан и Шварц рассматривают цену облигации, не подверженной риску дефолта, как функцию от двух переменных состояния: спот-ставки и долгосрочной процентной ставки (ставки по облигации с бесконечно длинным сроком до погашения, l). Стохастические процессы, описывающие динамику переменных состояния, определяется следующим образом:

$$dr = [\alpha_1 + \beta_1 (l - r)]dt + r\sigma_1 dz_1$$
$$dl = l(\alpha_2 + \beta_2 r + \gamma_2 l)dt + l\sigma_2 dz_2 \cdot$$

Такая формулировка предполагает, что приращение каждой из процентных ставок пропорционально текущему значению ставки. Функция дрейфа в выражении для краткосрочной спот-ставки соответствует гипотезе ожиданий временной структуры: если долгосрочные ставки заключают в себе информацию об ожидаемых будущих краткосрочных ставках, то краткосрочные ставки должны "возвращаться" к текущему значению долгосрочной ставки, т.е. $\beta_1 > 0$. Коэффициент пропорциональности в функции дрейфа для процесса динамики долгосрочных ставках принимается как линейная функция от r и l.

Аналитическое решение дифференциального уравнения цены облигации не было получено. Авторы рассматривают только дискретную запись стохастических процессов для эмпирической проверки выдвинутой гипотезы.

Шефер и Шварц (*Schaefer, Schwartz, 1984*) представили альтернативную двухфакторную модель. В качестве переменных состояния взяты ставка по облигации с бесконечным сроком обращения, l, и спрэд между безрисковой спот-ставкой и ставкой по облигации с бесконечным сроком обращения, s. Кроме того, функция дисперсии в уравнении для долгосрочной процентной пропорциональна уровню (в модели Бреннана-Шварца - квадрату уровня) данной ставки. Динамика переменных состояния описывается стохастическими процессами:

$$ds = \beta_1(\mu - s)dt + \sigma_1 dz_1$$
$$dl = \beta_2(s, l, t)dt + \sigma_2 \sqrt{l} dz_2 .$$

Рыночная цена риска λ принимается как константа, а коэффициент корреляции между Винеровскими процессами dz_1 и dz_2 – равным нулю.

Дифференциальное уравнение цены облигации принимает вид:

$$\frac{1}{2}\sigma_1^2 \frac{\partial^2 p}{\partial s^2} + \frac{1}{2}\sigma_2^2 l \frac{\partial^2 p}{\partial l^2} + \beta_1(\mu - \frac{\lambda\sigma_1}{\beta_1} - s)\frac{\partial p}{\partial s} + (\sigma_2^2 - ls)\frac{\partial p}{\partial l} - (l+s)p - \frac{\partial p}{\partial t} = 0 .$$

Решение уравнения при ограничении $p(s, l, T) = 1$ может быть представлено как $p(s,l,m) = x(s,m)y(l,m)$, m – срок до погашения, где

$$x(s,m) = \exp[\frac{1}{\beta_1}(1 - e^{-\beta_1 m})(s_\infty - s) - ms_\infty - \frac{\sigma_1^2}{4\beta_1^3}(1 - e^{-\beta_1 m})^2]$$

$$s_\infty = \mu - \frac{\lambda\sigma_1}{\beta_1} - \frac{1}{2}\frac{\sigma_1^2}{\beta_1^2}$$

$$y(l,m) = A(m)e^{-B(m)l}$$
$$A(m) = \left[\frac{2\alpha \exp\{(s+\alpha)m/2\}}{(s+\alpha)\{\exp(\alpha m) - 1\} + 2\alpha}\right]^2$$
$$B(m) = \frac{2\{\exp(\alpha m) - 1\}}{(s+\alpha)\{\exp(\alpha m) - 1\} + 2\alpha} .$$
$$\alpha = \sqrt{s^2 + 2\sigma_2^2}$$

Первый член произведения в формуле цены аналогичен цене облигации в модели Васичека, в то время как второй – решению в моделях общего равновесия (см. ниже).

Временная структура процентных ставок описывается уравнением

$$R(s,l,m) = -\frac{\ln p(s,l,m)}{m} = s_\infty - F(m)(s_\infty - s) + G(m) + \frac{1}{m}[B(m)l - \ln\{A(m)\}]$$

$$F(m) = \frac{1-e^{-\beta_1 m}}{\beta_1 m} \quad .$$

$$G(m) = \frac{\sigma_1^2}{4\beta_1^3 m}(1-e^{-\beta_1 m})^2$$

Таким образом, временная структура процентных ставок не зависит явным образом от времени, но является функцией от срока до погашения m.

* * *

К классу факторных моделей временной структуры также относятся однофакторные модели Marsh, Rosenfeld, 1983; Oldfield, Rogalski, 1987; Nelson, Siegel, 1987; Fong, Vasicek, 1991, двухфакторные модели Gong, Remolona, 1997; Vetzal, 1997; Balduzzi, Das, Foresi, 1998, трехфакторные модели Kraus, Smith, 1993; Bliss, 1997; Dillen, 1997. Сравнительный анализ факторных стохастических моделей и моделей общего равновесия на основе подхода Кокса, Ингерсолла, Росса (см. ниже) можно найти в Chan, Karolyi, Longstaff, Sanders, 1992; Fornari, Mele, 1995; Boero, Torricelli, 1996.

5. Стохастические модели общего равновесия

Модели общего равновесия очень близки однофакторным моделям временной структуры. Во многих случаях исследователи не делают различия между ними, так как оба класса моделей работают с одинаковым математическим аппаратом. Цена облигации определяется как стохастический процесс, определяемый одной или несколькими переменными состояния (факторами). Однако если факторные модели рассматривают динамику цены финансового актива в отрыве от экономики в целом, стохастический процесс задается произвольно, то в данном классе моделей рассматривается условие общего равновесия в экономике. Стохастический характер изменения цен финансовых активов вызван существующей неопределенностью относительно будущего состояния основных экономических показателей. Таким образом, цены финансовых активов и их стохастические свойства определяются эндогенно. Дифференциальное уравнение цены облигации в частных производных является частью такой модели общего равновесия, а его решение определяет равновесную цену облигации в терминах реальных переменных, описывающих экономику (см., например, *Cox, Ingersoll, Ross, 1985a*).

5.1. Однофакторная модель общего равновесия Кокса-Ингерсолла-Росса

В 1985 году Кокс, Ингерсолл и Росс нашли решение для цен финансовых активов в рамках модели общего равновесия в экономике (*Cox, Ingersoll, Ross, 1985a*), а также представили его частный случай для определения временной структуры процентных ставок (*Cox, Ingersoll, Ross, 1985b*).

Рассматривается межвременная модель конкурентной экономики в непрерывном времени. В такой экономике существует одно благо, и цены всех активов измеряются в единицах этого блага. Производственные возможности представлены множеством из n видов экономической деятельности с линейной производственной функцией. Вектор ожидаемых доходностей данных видов экономической деятельности обозначим α, а их матрицу ковариации – GG', где G - матрица с размерностью $n \times (n+k)$. Компоненты α и GG' являются функциями k-мерного вектора Y, характеризующего уровень технологии и изменяющегося стохастически во времени. Динамика Y, таким образом, определяет производственные возможности, которые доступны для экономики в будущем. Вектор ожидаемых изменений $Y - \mu$, а матрица их ковариации – SS'.

Экономика состоит из одинаковых индивидуумов, каждый из которых максимизирует свою целевую функцию, представленную в виде

$$\mathrm{E}\int_{t}^{t'} U[C(s), Y(s), s]ds\,,$$

где $C\,(s)$ – потребление в момент s, U – функция полезности Ноймана-фон Моргенштерна, t' – окончание временного горизонта ожиданий. Максимизируя свою целевую функцию, каждый индивидуум выбирает оптимальный уровень потребления C^*, оптимальное распределение α^* богатства W между инвестициями в различные виды производства, оптимальное распределение b^* богатства между инвестициями в различные виды финансовых активов. Финансовые активы оцениваются эндогенно, так что платежи по ним являются функциями от богатства и технологии. Остаток имеющегося богатства, который определяется из бюджетного ограничения, занимается или одалживается по ставке r. Неявная функция полезности $J = J(W, Y, t)$ выводится при решении задачи максимизации.

В равновесии процентная ставка и ожидаемые доходности финансовых активов должны быть такими, что все богатство инвестировано в производство. Инвестиции совершаются непосредственно индивидуумами или опосредовано – фирмами. Следовательно, значение J в равновесии определяется из решения проблемы оптимального планирования с учетом всех возможных видов физического производства. После того, как J явно записана, условие оптимального распределения богатства между финансовыми активами и займами может быть объединено с условием достижения равновесия на финансовом рынке, и определены равновесные процентная ставка и ожидаемые доходности активов.

Для исследования временной структуры процентных ставок рассматривается случай функции полезности с постоянным абсолютным неприятием риска. В частности, функция полезности $U[C(s), Y(s), s]$ не зависит от переменной состояния Y и имеет вид

$$U[C(s),s] = e^{-\rho s}\left[\frac{C(s)^{\gamma}-1}{\gamma}\right],$$

где ρ – постоянный дисконтирующий фактор. Косвенная функция полезности выражается как

$$J(W,Y,t) = f(Y,t)U(W,t) + g(Y,t).$$

Такой вид косвенной функции полезности позволяет сделать два важных упрощения: 1) коэффициент относительного неприятия риска для этой функции полезности постоянен и не зависит от богатства и переменной состояния:

$$-W\,\frac{\partial^2 J}{\partial W^2}\Bigg/\frac{\partial J}{\partial W} = 1-\gamma\,;$$

2) эластичность предельной полезности богатства по отношению к переменной состояния не зависит от богатства:

$$-\frac{\partial^2 J}{\partial W\,\partial Y}\Bigg/\frac{\partial J}{\partial W} = -\frac{\partial f}{\partial Y}\Bigg/ f\,.$$

Оптимальное распределение инвестиционного портфеля a^* зависит от Y и не зависит от W. Следовательно, вектор факторов премии за риск и равновесная процентная ставка также зависят только от Y.

Таким образом, в равновесном состоянии вектор ожидаемой доходности финансовых активов равен:

$$R = \bar{r} + \frac{\partial \phi}{\partial Y},$$

где $\bar{r}$ - вектор, все компоненты которого равны безрисковой ставке r;

$\frac{\partial \phi}{\partial Y} = \left(\frac{-\partial^2 U(C^*)/\partial C^2}{\partial U(C^*)/\partial C} \right) \operatorname{cov}(C, W)$ - вектор премии за риск для каждого из финансовых активов.

Для логарифмической функции полезности, соответствующей случаю $\gamma = 0$, получается что $f(Y,t) = \frac{1 - e^{-\rho(t'-t)}}{\rho}$. Таким образом, косвенная функция полезности зависит от переменной состояния только через $g(Y,t)$. Вектор премии за риск равен $\frac{\partial \phi}{\partial Y} = a^{*\prime} GS$, а оптимальное распределение инвестиционного портфеля

$$a^* = (GG')^{-1} \alpha + \left(\frac{I - I'(GG')^{-1} \alpha}{I'(GG')^{-1} I} \right) (GG')^{-1} I,$$

где I - единичная матрица.

Модель временной структуры процентных ставок основывается на следующих трех дополнительных предпосылках:

1) изменения производственных возможностей описываются единственной переменной состояния, Y;

2) *среднее и дисперсия норм доходности производственных процессов пропорциональны* Y. Таким образом, ни среднее, ни дисперсия не доминируют при выборе портфеля при высоких значениях Y;

3) Динамика переменной состояния Y задается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dY(t) = (\xi Y + \zeta)dt + \upsilon\sqrt{Y}\,dw(t),$$

где ξ и ζ – константы, $\xi \geq 0$, а υ – (*n* + *k*)-мерный вектора, с постоянными компонентами υ_0.

Экономические агенты выбирают такие значения *C**, *a**, *b**, которые максимизируют их функцию полезности при заданных *Y*, α, *r*. Условие равновесия в экономике определяет равновесную процентную ставку, равновесные ожидаемые доходности финансовых активов, общий план выпуска, общий план потребления.

Согласно принятому выше предположению, $\alpha = \hat{\alpha}Y, GG' = \Omega Y, GS' = \Sigma Y$, где $\hat{\alpha}, \Omega, \Sigma$ – константы. Тогда равновесная процентная ставка может быть записана как

$$r(Y) = \left(\frac{I'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - I}{I'\Omega^{-1}I}\right)Y.$$

Таким образом, процентная ставка также следует диффузионному процессу. Параметры данного процесса таковы:

дрейф: $\left(\frac{I'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - I}{I'\Omega^{-1}I}\right)(\xi Y + \zeta) \equiv \kappa(\theta - r)$;

дисперсия $\left(\frac{I'\Omega^{-1}\hat{\alpha} - I}{I'\Omega^{-1}I}\right)^2 \upsilon\upsilon' Y \equiv \sigma^2 r$,

где κ, θ, σ^2 – константы, $\kappa\theta \geq 0, \sigma^2 > 0$. Винеровский процесс для процентной ставки определяется как $\sigma\sqrt{r}dz(t) = \upsilon\sqrt{Y}\,dw(t)$. Динамика процентной ставки описывается стохастическим дифференциальным уравнением:

$$dr = \kappa(\theta - r)dt + \sigma\sqrt{r}dz(t).$$

Для $\kappa > 0, \theta > 0$ это соответствует непрерывному авторегрессионному процессу первого порядка (процессу с возвращением к среднему), где случайное движение процентной ставки возвращается к долгосрочному значению, θ. Коэффициент κ определяет скорость возвращения. Процентная ставка достигает нуля при $\sigma^2 > 2\kappa\theta$. При $2\kappa\theta \geq \sigma^2$ восходящий дрейф слишком силен, чтобы достигнуть начального значения. В любом случае, одинаковый знак у параметров функции дрейфа (κ и θ) означает, что при положительном начальном значении, процентная ставка никогда не может впоследствии стать отрицательной.

Поведение процентной ставки обладает следующими реалистичными свойствами: 1) отрицательные ставки исключены; 2) если процентная ставка достигает нуля, впоследствии она становится положительной; 3) абсолютная дисперсия процентной ставки возрастает с увеличением уровня процента; 4) существует устойчивое стационарное распределение процентных ставок.

Математическое ожидание и дисперсия процентной ставки в момент времени s при заданном текущем значении $r(t)$ равны

$$\mathrm{E}[r(s)|r(t)] = r(t)e^{-\kappa(s-t)} + \theta(1 - e^{-\kappa(s-t)})$$

$$D[r(s)|r(t)] = r(t)\frac{\sigma^2}{\kappa}(e^{-\kappa(s-t)} - e^{-2\kappa(s-t)}) + \theta\frac{\sigma^2}{2\kappa}(1 - e^{-\kappa(s-t)})^2.$$

Для дисконтных облигаций без риска дефолта, их цены полностью описывают временную структуру. Премия за риск будет определяться как

$$\frac{\partial\phi}{\partial Y} = \left[\hat{\alpha}'\Omega^{-1}\Sigma + \left(\frac{I - I'\Omega^{-1}\hat{\alpha}}{I'\Omega^{-1}I}\right)I'\Omega^{-1}\Sigma\right]Y \equiv \lambda Y.$$

Дифференциальное уравнение цены дисконтной облигации в частных производных записывается в виде

$$\begin{gathered}\tfrac{1}{2}\sigma^2 r\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \kappa(\theta - r)\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial p}{\partial t} - \lambda r\frac{\partial p}{\partial r} - rp = 0\\ p(r,T,T) = 1\end{gathered} \quad (5.1)$$

Согласно лемме Ито, первые три члена определяют ожидаемое изменение цены облигации. Таким образом, ожидаемая доходность от владения облигацией равна $r+\frac{\lambda r}{p}\frac{\partial p}{\partial r}$. Мгновенная премия за владение облигацией пропорциональна эластичности цены облигации по проценту. Произведение λr обозначает ковариацию между изменением процентной ставки и процентным изменением распределения богатства (структуры рыночного портфеля). Так как $\frac{\partial p}{\partial r}<0$, положительная премия будет наблюдаться только в случае, $\lambda<0$.

Из уравнения (5.1) видно, что цена облигации зависит только от одной случайной переменной, спот-ставки, которая играет роль инструментальной переменной для описания неопределенности технологических изменений.

Решение уравнения (5.1) записывается в следующем виде:

$$p(r,t,T)=A(t,T)e^{-B(t,T)r}$$

где

$$A(t,T)=\left[\frac{2\gamma e^{[(\kappa+\lambda+\gamma)(T-t)]/2}}{(\gamma+\kappa+\lambda)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2\kappa\theta/\sigma^2}$$

$$B(t,T)=\frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\kappa+\lambda)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}.$$

$$\gamma=\sqrt{(\kappa+\gamma)^2+2\sigma^2}$$

Цена облигации является убывающей выпуклой функцией от процентной ставки и убывающей функцией от срока до погашения. Влияние параметров стохастического процесса спот-ставки различно: цена облигации является убывающей выпуклой функцией от среднего долгосрочного уровня спот-ставки θ и возрастающей вогнутой (убывающей выпуклой) функцией от параметра скорости возвращения к среднему κ, если процентная ставка выше (ниже) θ. Кроме того, цены облигаций – возрастающие вогнутые функции от рыночной цены риска λ. Это может быть объяснено тем, что высокие значения цены риска означает большую ковариацию процентных ставок с богатством. Таким образом, при высоких значениях параметра риска цены облигаций, вероятно, будут выше. Это соответствует низкому уровню богатства и, следовательно, его более высокой предельной полезности. Цена облигации является возрастающей вогнутой функцией от σ^2. Наиболее важным объяснением последнего может служить то, что при высоких значениях дисперсии, характеризующих рост неопределенности относительно будущих производственных возможностей, не склонные к риску инвесторы оценивают актив с гарантированной прибылью выше.

Доходность к погашению облигации будет в таком случае равна

$$R(r,t,T) = \frac{rB(t,T) - \ln A(t,T)}{T-t}.$$

При приближении даты погашения доходность к погашению стремится к значению текущей спот-ставки, при любых значениях параметров. Доходность к погашению облигации при увеличении срока обращения до бесконечности стремится к пределу $R(r,t,\infty) = \dfrac{2\kappa\theta}{\gamma+\kappa+\lambda}$. Если спот-ставка ниже данного значения, кривая доходности монотонно возрастает. При спот-ставке выше $\dfrac{\kappa\theta}{\kappa+\lambda}$ временная структура имеет отрицательный наклон. Если значения краткосрочной процентной ставки находятся в промежутке между данными величинами, кривая доходности имеет "горб".

Сравнительная статика кривой доходности позволяет сделать несколько выводов, согласующихся с экономической интуицией. 1) Рост текущей процентной ставки вызывает повышение доходности к погашению по всем срокам, однако, влияние на короткий конец кривой доходности сильнее. 2) Повышение долгосрочного среднего значения спот-ставки ведет к росту всех доходностей, но данный эффект сильнее проявится на длинном конце кривой. 3) Доходность к погашению снижается при росте параметров риска (неопределенности) σ^2 и λ.

5.2. Нелинейная модель общего равновесия Лонгстаффа

В 1989 году Лонгстафф (*Longstaff, 1989*) опубликовал статью с альтернативным представлением стохастического процесса в рамках той же самой модели экономики, что и у Кокса-Ингерсолла-Росса (*Cox, Ingersoll, Ross, 1985b*)[15]. Однако предполагается, что динамика переменной состояния *Y* следует стохастическому процессу $dY = mdt + sdz$, где $m < 0$, $s > 0$ - константы, а динамика спот-ставки пропорциональна квадрату переменной состояния $r \sim Y^2$. В этом случае скорость возвращения к долгосрочному среднему значению пропорциональна $\theta - \sqrt{r}$, а не $\theta - r$. Таким образом, динамика мгновенной безрисковой ставки описывается нелинейным стохастическим уравнением:

$$\begin{aligned} &dr = \kappa(\theta - \sqrt{r})dt + \sigma\sqrt{r}dz \\ &\kappa > 0 \\ &\sigma > 0 \end{aligned},$$

причем $\theta = \dfrac{\sigma^2}{4\kappa} > 0$.

Такой процесс сохраняет все свойства, присущие поведению спот-ставки в модели Кокса-Ингерсолла-Росса. Кроме того, ему присущи еще два важных свойства. 1) Для описания динамики процентной ставки (в силу $\theta = \dfrac{\sigma^2}{4\kappa}$) требуется знание только двух параметров: κ и σ^2. Долгосрочное среднее значение ставки не может быть определено отдельно от других

[15] В статьях *Beaglehole, Tenney, 1992*, и *Constantinides, 1992*, указывается на то, что решение в модели не является общим решением для рассматриваемого стохастического процесса и существует только при определенных предпосылках, принятых автором.

параметров процесса. Например, если σ^2 увеличивается, то растет и среднее значение, и наоборот. 2) Скорость, с которой процентная ставка возвращается к среднему значению θ^2, несимметрична; высокие процентные ставки менее гибки. Это вызвано тем, что параметр дрейфа пропорционален $\theta - \sqrt{r}$. При $\sqrt{r} < \theta (r < \theta^2)$ наблюдается восходящий дрейф спот-ставки. При $\sqrt{r} > \theta (r > \theta^2)$ дрейф – нисходящий. Однако дрейф слабее (по абсолютному значению) когда спот-ставка равна $\theta^2 + \varepsilon$, чем при $\theta^2 - \varepsilon$. Такая асимметрия ведет к тому, что ставка возвращается к среднему с более высоких значений медленнее, чем с более низких. Условные математическое ожидание и дисперсия в момент времени *s* > *t* линейны по отношению к *r*:

$$\mathrm{E}[r(s) | r(t)] = r + \frac{\sigma^2 s}{4}$$

$$D[r(s) | r(t)] = \sigma^2 \left(rs + \frac{\sigma^2 s^2}{8} \right).$$

Уравнение цены облигации принимает вид

$$\frac{r\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \left(\frac{\sigma^2}{4} - \kappa \sqrt{r} - 2\lambda r \right) \frac{\partial p}{\partial r} - rp - \frac{\partial p}{\partial t} = 0.$$

$$p(r, T, T) = 1 \tag{5.2}$$

Ожидаемая мгновенная доходность от владения дисконтной облигацией равна $r + \frac{2\lambda r}{p} \frac{\partial p}{\partial r}$. Так же, как и в модели Кокса-Ингерсолла-Росса, она пропорциональна эластичности цены облигации по проценту, и премия за срок положительна при отрицательной цене риска.

При решении уравнения (5.2) мы получаем равновесную цену облигации в следующем виде:

$$p(r, m) = A(m) e^{B(m) r + C(m)\sqrt{r}},$$

где

$$A(m)=\sqrt{\left(\frac{1-c_0}{1-c_0e^{\gamma m}}\right)}\exp\left(c_1+c_2m+\frac{c_3+c_4e^{\gamma m/2}}{1-c_0e^{\gamma m}}\right)$$

$$B(m)=\frac{2\lambda-\gamma}{\sigma^2}+\frac{2\gamma}{\sigma^2(1-c_0e^{\gamma m})}$$

$$C(m)=\frac{2\kappa(2\lambda+\gamma)(1-e^{\gamma m/2})^2}{\gamma\sigma^2(1-c_0e^{\gamma m})}$$

$$\gamma=\sqrt{4\lambda^2+2\sigma^2}$$

$$c_0=\frac{2\lambda+\gamma}{2\lambda-\gamma}$$

$$c_1=\frac{-\kappa^2}{\gamma^3\sigma^2}(4\lambda+\gamma)(2\lambda-\gamma)$$

$$c_2=\frac{2\lambda+\gamma}{4}-\frac{\kappa^2}{\gamma^2} \qquad .$$

$$c_3=\frac{4\kappa^2}{\gamma^3\sigma^2}(2\lambda^2-\sigma^2)$$

$$c_4=\frac{-8\lambda\kappa^2}{\gamma^3\sigma^2}(2\lambda+\gamma)$$

Цена облигации является функцией от двух переменных: спот-ставки и срока до погашения и параметрически зависит от констант κ, σ^2, λ. Отличительной чертой данного решения является то, что доходность к погашению нелинейно зависит от спот-ставки. В большинстве других моделей (факторных, общего равновесия, с отсутствием арбитража) зависимость линейна.

Нелинейность данной зависимости придает решению ряд интересных свойств. 1). Рост спот-ставки не всегда ведет к снижению цены облигации, величина $\frac{\partial p}{\partial r}$ больше не является строго отрицательной. $\frac{\partial p}{\partial r}$ меньше нуля при $r > \frac{\kappa^2(1-e^{\gamma m/2})^4}{\gamma^2(e^{\gamma m}-1)^2}$, и наоборот. Цена облигации является вогнутой функцией при малых значениях спот-ставки и выпуклой – при высоких. 2) Производная цены облигации по сроку до погашения меньше нуля для любых значений спот-ставки и срока до погашения. Это соответствует реалистическому предположению о том, что форвардные ставки строго положительны. 3) Знаки производных цены облигации по κ и σ^2 могут принимать любой знак, поскольку их изменения влияют также на величину долгосрочного среднего значения ставки. 4) Знак производной цены облигации по рыночной цене риска также не определен, так как нелинейная модель не требует монотонности премии за срок по сроку до погашения.

Доходность к погашению дисконтной облигации равна

$$R(r,m) = -\frac{1}{m}(\ln A(m) + B(m) + C(m)\sqrt{r}).$$

Благодаря нелинейности данная модель охватывает более сложные (и реалистичные) формы кривой доходности, чем модели с линейной зависимостью от спот-ставки. В частности, модель соответствует случаям с переменной выпуклостью и вогнутостью кривой доходности, которые не могут быть описаны с помощью модели Кокса-Ингерсолла-Росса.

Так же, как и в предыдущей модели, доходность к погашению облигации с бесконечным сроком до погашения равняется постоянной величине $\frac{\kappa^2}{\gamma^2} + \frac{\gamma - 2\lambda}{4} > 0$, которая не зависит от текущей спот-ставки. Это соответствует наблюдаемому горизонтальному участку кривой доходности на ее длинном конце. Обе модели (Кокса-Ингерсолла-Росса и Лонгстаффа) показывают, что волатильность долгосрочных ставок ниже, чем краткосрочных.

Премия за срок владения (ожидаемая доходность минус спот-ставка) для дисконтных облигаций равна

$$\Phi_h(r,m) = 2\lambda\left(B(m)r + C(m)\frac{\sqrt{r}}{m}\right).$$

Премия за срок владения зависит как от спот-ставки, так и от срока до погашения. В отличие от модели Кокса-Ингерсолла-Росса, в которой премия за срок монотонно возрастает по сроку до погашения, в модели Лонгстаффа премия за срок может достигать максимума. Кроме того, при бесконечном сроке к погашению премия за срок может принимать отрицательные значения:

$$\lim_{m\to\infty}\Phi_h(r,m) = \frac{2\lambda(2\lambda-\gamma)}{\sigma^2}\sqrt{r}\left(\sqrt{r}-\frac{\kappa}{\gamma}\right) < 0, \kappa > \gamma\sqrt{r}.$$

5.3. Двухфакторная модель общего равновесия Лонгстаффа-Шварца

Авторы (*Longstaff, Schwartz, 1992a*) рассматривают модель экономики, аналогичную модели Кокса-Ингерсолла-Росса, в которой существуют две переменные состояния: X – компонент ожидаемой доходности, не связанный с неопределенностью в объеме выпуска, Y – компонент, который учитывает последнее. Динамика переменных состояния описывается аналогичными стохастическими процессами:

$$\begin{aligned} dX &= (a_1 - b_1 X)dt + s_1\sqrt{X}dz_1 \\ dY &= (a_2 - b_2 Y)dt + s_2\sqrt{Y}dz_2 \end{aligned},$$

где $a_1, b_1, s_1, a_2, b_2, s_2$ – положительные константы, z_1, z_2 – Винеровские процессы.

В качестве факторов, определяющих временную структуру процентных ставок, выбраны безрисковая спот-ставка и ее волатильность (мгновенная дисперсия изменений), V. Факторы представлены в виде линейных функций от переменных состояния:

$$\begin{aligned} r &= \alpha X + \beta Y \\ V &= \alpha^2 X + \beta^2 Y \end{aligned},$$

$\alpha > 0, \beta > 0$ для всех возможных значений переменных состояния. В этом случае динамика спот-ставки и волатильности описывается дифференциальными стохастическими уравнениями:

$$dr = \left(\alpha\gamma + \beta\eta - \frac{\beta\delta - \alpha\xi}{\beta - \alpha} r - \frac{\xi - \delta}{\beta - \alpha} V\right) dt + \alpha \sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}} dz_1 + \beta \sqrt{\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}} dz_2$$

$$dV = \left(\alpha^2\gamma + \beta^2\eta - \frac{\alpha\beta(\delta - \xi)}{\beta - \alpha} r - \frac{\beta\xi - \alpha\delta}{\beta - \alpha} V\right) dt + \alpha^2 \sqrt{\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}} dz_1 + \beta^2 \sqrt{\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}} dz_2 ,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \eta, \xi$ – положительные константы. Данные стохастические процессы взаимозависимы, т. е. спот-ставка зависит от волатильности, и наоборот.

Цена дисконтной облигации как функция от двух факторов и срока до погашения записывается в виде:

$$p(r, V, m) = A^2(m) B^{2\eta}(m) e^{-\kappa m + C(m) r + F(m) V}$$

$$A(m) = \frac{2\phi}{(\delta + \phi)(e^{\phi m} - 1) + 2\phi}$$

$$B(m) = \frac{2\psi}{(\nu + \psi)(e^{\psi m} - 1) + 2\psi}$$

$$C(m) = \frac{\alpha\phi(e^{\psi m} - 1) B(m) - \beta\psi(e^{\phi m} - 1) A(m)}{\phi\psi(\beta - \alpha)}$$

$$F(m) = \frac{\psi(e^{\phi m} - 1) A(m) - \phi(e^{\psi m} - 1) B(m)}{\phi\psi(\beta - \alpha)} .$$

$$\nu = \xi + \lambda$$

$$\phi = \sqrt{2\alpha + \delta^2}$$

$$\psi = \sqrt{2\beta + \nu^2}$$

$$\kappa = \gamma(\delta + \phi) + \eta(\nu + \psi)$$

Анализ данного решения показывает, что, как и в нелинейной модели Лонгстаффа, частная производная цены облигации по спот-ставке может иметь любой знак. Аналогично, четко не определяется знак частной производной цены облигации по волатильности. Форвардные ставки строго положительные. Однако доходность к погашению является линейной функцией от факторов:

$$R(r,V,m) = -\frac{\kappa m + 2\gamma \ln A(m) + 2\eta \ln B(m) + C(m)r + F(m)V}{m}.$$

Предел доходности к погашению при бесконечном сроке до погашения не зависит от значения факторов и равен $\gamma(\phi-\delta)+\eta(\psi-\nu)$. Зависимость кривой доходности от двух факторов позволяет описать формы временной структуры, не доступные для однофакторных моделей, например, "пляску" кривой доходности с несколькими "горбами" и "впадинами". Волатильность оказывает наиболее сильное влияние на среднюю часть кривой доходности, в то время как концы кривой доходности зависят, в большей степени, от уровня спот-ставки.

Форвардная премия за срок также является линейной функцией от факторов:

$$\Phi_f(r,V,m) = \lambda \frac{(e^{\psi m}-1)B(m)}{\psi(\beta-\alpha)}(\alpha r - V).$$

Премия за срок всегда положительна при отрицательной цене риска. Для коротких сроков до погашения премия за срок является возрастающей функцией по спот-ставке. На длинном конце кривой доходности возможно обратное. Соотношение между премией за срок и волатильностью также не может быть строго определено. Дисперсия доходности к погашению в данной модели возрастает по мере увеличения срока до погашения.

* * *

Более поздние построения в области однофакторных и многофакторных моделей общего равновесия также базируются на моделе Кокса-Ингерсолла-Росса. К их числу относятся однофакторные модели *Lee, 1989; Longstaff, 1990, 1992; Gray, 1996; Wang, 1996; Eckwert, 1996;* двухфакторные модели *Longstaff, Schwartz, 1992b; Chen, Scott, 1992; Steely, 1997; Tice, Webber, 1997*; трехфакторная модель *Chen, Scott, 1993*. В России первая статья, посвященная представлению модели общего равновесия Кокса-Ингерсолла-Росса, была опубликована в 1992 году в журнале "Экономика и математические методы" (*Буклемишев, Поманский, 1992*).

6. Модели с отсутствием арбитража[16]

В факторных моделях и моделях общего равновесия временная структура процентных ставок эндогенна и определяется как функция не только от срока до погашения, но и от одного (или нескольких) факторов (переменных состояния), в большинстве случаев – безрисковой спот-ставки. Модели с отсутствием арбитража (или модели с эндогенной спот-ставкой) рассматривают всю временную структуру в качестве экзогенной, изменяющейся по некоторому закону. На эти изменения накладываются определенные ограничения. В первую очередь, должна отсутствовать возможность для совершения арбитражных операций, приносящих прибыль. Это ограничение обусловило название данного класса моделей (по определению Хо и Ли: *Ho, Lee, 1986*) – модели с отсутствием арбитража. Сравнение с факторными моделями и моделями общего равновесия показывает, что стохастический процесс спот-ставки зависит от исходной временной структуры, т. е. определяется эндогенно, в то время как первые два класса моделей задают его экзогенно.

Данное отличие вызвано, во многом, разными задачами при построении моделей. Первые два класса моделей имеют целью вывести временную структуру процентных ставок из предпосылок о равновесии и найти такой стохастический процесс динамики спот-ставки, который может породить реалистичную

---

[16] Правильнее было бы назвать данный раздел "*Модели с эндогенной спот-ставкой*", что в большей степени соответствует основной сути отличий данного класса моделей от рассмотренных выше подходов. Однако мы оставляем наиболее часто встречающееся в литературе название "*Модели с отсутствием арбитража*".

равновесную временную структуру. В рассматриваемом ниже подходе берется исходная временная структура, задается характер изменений временной структуры и выводится движение краткосрочной ставки для формирования цен облигаций в будущем. Заметим, что модели с отсутствием арбитража допускают существование отрицательных форвардных ставок. Однако они позволяют анализировать фактические наблюдаемые кривые доходности для определения цен других связанных финансовых инструментов, в частности, цен облигаций и производных финансовых инструментов.

6.1. Биноминальная модель Хо и Ли

Хо и Ли (*Ho, Lee, 1986*) исходя из того, что в экономике, в которой отсутствует неопределенность, форвардные ставки, определяемые текущей временной структурой, должны соответствовать будущим фактическим процентным ставкам. В качестве наиболее простого способа введения неопределенности они предлагают биноминальный процесс, в котором временная структура процентных ставок в момент времени $t+1$ равна временной структуре форвардных ставок в момент времени t, скорректированной на значение функции возмущений. Последняя может принимать два значения: "верхнее" и "нижнее"[17].

Модель основывается на следующих предпосылках:

1) Рынок совершенен, т. е. отсутствуют трансакционные издержки, налоги, все облигации находятся на руках у множества мелких инвесторов.

2) *Равновесие на рынке устанавливается в дискретные моменты времени, отделенные друг от друга одинаковыми интервалами, равными единице.*

[17] В последствие Блисс и Ронн (*Bliss, Ronn, 1989*) рассмотрели модель Хо и Ли с тремя возможными значениями в каждый момент времени: "верхним", "нижним" и "неизменным".

3) *Рынок облигаций полон, т. е. существуют доступные для любого инвестора дисконтные облигации с любым сроком до погашения* m, $m = 0,1,2,\ldots$.

4) *В каждый момент времени существует конечное число возможных состояний.*

Равновесная цена дисконтной облигации со сроком до погашения m для состояния i записывается как $p_i(t,m)$. Поскольку цена облигации записывается как функция от срока до погашения, то она полностью описывает временную структуру процентных ставок в момент t для состояния i. Функция цены облигации от срока до погашения называется *дисконтной функцией*.

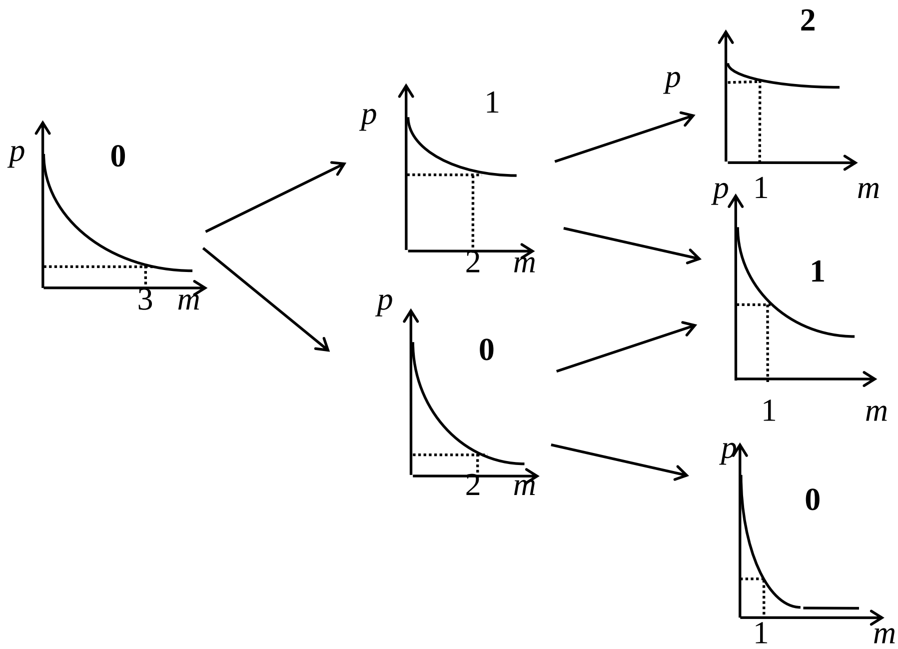
На цену облигации накладываются следующие ограничения:

$$p_i(t,0) = 1, \forall i, m$$
$$\lim_{m\to\infty} p(t,m) = 0, \forall i, m \,.$$

Динамика временной структуры описывается следующим образом. В начальный момент времени мы имеем нулевое состояние, и значение дисконтной функции записывается как $p_0(0,m)$. В момент времени 1 дисконтная функция может принять два возможных значения, соответствующих состояниям 0 и 1, т. е. существует всего два возможных состояния, $p_0(1,m); p_1(1,m)$. Значение функции в состоянии 1 называется "верхним", а в состоянии 0 – "нижним".

В момент времени 2 возможны три состояния: 0, 1 и 2 (предполагается, что "верхнее" значение для функции, находившейся в состоянии 0, идентично "нижнему" значению функции, находившейся в состоянии 1, см. рисунок 6.1).

Рисунок 6.1



Дальнейшая динамика дисконтной функции (временной структуры) описывается аналогичным стохастическим процессом. Для любого (t + 1) периода времени между моментами t и t + 1 значение дисконтной функции $p_i(t, m)$ определяется в момент времени t после прохождения i состояний с "верхним" значением и (t - i) состояний с "нижним" значением. В соответствии с принятой предпосылкой дисконтная функция зависит только от числа "верхних" значений и не зависит от их последовательности. Таким образом, биноминальный процесс в момент времени t записывается как

$$p_i(t, m) = \begin{cases} p_{i+1}(t+1, m) & \text{– "верхнее" значение} \\ p_i(t+1, m) & \text{– "нижнее" значение.} \end{cases}$$

Дисконтная функция определяется для каждого момента t и каждого состояния i. Множество всех дисконтных функций образует биноминальную структуру. Узлы такой структуры определяются моментом времени и состоянием (t, i). Для любого момента времени t существует t + 1 состояний (i = 0,1,2,..., t). Временная структура может переходить от одного узла в другой по различной траектории, но это не влияет на значение дисконтной функции в конечном узле на траектории, т. е. дисконтные функции не зависят от траектории движения временной структуры.

Введем в модель ограничение на траекторию временной структуры, обеспечивающее отсутствие арбитража. В условиях определенности дисконтная функция определена в каждый момент времени t и для каждого состояния i: $p_i(t, m)$ и должна обеспечивать временную структуру форвардных ставок, не допускающую арбитража:

$$f_i(t, m) = p_i(t+1, m) = p_{i+1}(t+1, m) = \frac{p_i(t, m+1)}{p_i(t,1)},$$

$$m = 0,1, \ldots$$

поскольку "верхнее" и "нижнее" состояния неразличимы.

Для учета неопределенности в модель вводятся две функции возмущений, $h(m)$ и $h^*(m)$, такие что "верхнее" значение дисконтной функции соответствует

$$p_{i+1}(t+1, m) = \frac{p_i(t, m+1)}{p_i(t,1)} h(m),$$

а "нижнее" значение –

$$p_i(t+1, m) = \frac{p_i(t, m+1)}{p_i(t,1)} h^*(m),$$

при этом $h(m), h^*(m) > 0$ и $h(0) = h^*(0) = 1$.

Функции возмущений отвечают за отклонения дисконтной функции от временной структуры форвардных ставок, т. е. определяют разницу между "верхними" и "нижними" ценами облигаций в следующий момент времени. Если $h(m)$ больше единицы для всех значений m, то все цены облигаций будут расти до "верхнего" состояния. Аналогично, если $h^*(m)$

меньше единицы для всех значений *m*, цены всех облигаций упадут до "нижнего" состояния.

Условие отсутствия арбитража накладывает ограничения на значения функций возмущения в каждом узле (*t*, *i*). В результате общий вид функций возмущений должен отвечать условию:

$$h(m)\pi + h^*(m)(1-\pi) = 1 \quad \forall m,$$

где π – параметр биноминального распределения вероятности, не зависящий от времени и срока до погашения. Авторы объясняют π как отношение доходности в "нижнем" состоянии ко всему спрэду между доходностями в "верхнем" и "нижнем" состояниях. Следовательно, при высоких значениях параметра π наиболее вероятно снижение цены облигации. При значении параметра близком к нулю цена, очевидно, будет расти. На функции возмущения наложено граничное условие $h(0) = h^*(0) = 1$. В качестве примера функций возмущения рассматриваются:

$$h(m) = \frac{1}{\pi + (1-\pi)\delta^m}$$

$$h^*(m) = \frac{\delta^m}{\pi + (1-\pi)\delta^m},$$

$$m \geq 0$$

где δ – положительная константа, $\delta < 1$ (так как $h^*(m) < h(m)$), равная спрэду между значениями функций возмущения. Чем больше спрэд, тем выше волатильность процентных ставок.

Таким образом, временная структура процентных ставок однозначно определяется двумя константами π и δ. $h(m)$ – монотонно возрастающая вогнутая функция с асимптотой $1/\pi$, $h^*(m)$ – выпуклая функция, монотонно убывающая до нуля. "Верхнее" значение цены облигации определяется $h(m)$, следовательно, чем больше срок до погашения, тем больше будет изменение цены. Изменение цены краткосрочных облигаций противоположно δ. Для долгосрочных облигаций изменение цены постоянно для всех сроков до погашения и равно $1/\pi$, причем случай $\delta = 1$ соответствует полной определенности.

Спот-ставка в модели может быть получена из формулы для цены одпопериодной облигации $p_i(t,1) = \dfrac{p(t,1)\delta^{t-i}}{p(t,0)[\pi + (1-\pi)\delta^t]}$. В этом случае одпопериодная ставка равна $r_i(t,1) = \ln\left[\dfrac{p(t,0)}{p(t,1)}\right] + \ln[\pi\delta^{-t} + (1-\pi)] + i\ln\delta$. Математическое ожидание и дисперсия спот-ставки в момент времени t с вероятностью q достижения состояния i определяются как

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_t r(t) &= \ln\left[\frac{p(t,0)}{p(t,1)}\right] + \ln[\pi\delta^{-(1-q)t} + (1-\pi)\delta^{qt}] \\ D_t r(t) &= tq(1-q)(\ln\delta)^2 \end{aligned}.$$

Первое слагаемое в формуле математического ожидания представляет собой одпопериодную форвардную ставку, следовательно, ожидаемое значение спот-ставки равно форвардной ставке плюс некоторое отклонение, вызванное неопределенностью. При $\delta = 1$ отклонение равно нулю. Дисперсия спот-ставки зависит только от спрэда, причем, как и ожидалось, зависимость обратная.

Доходность к погашению дисконтной облигации записывается в следующем виде:

$$r_i(t,m) = \begin{cases} -\dfrac{1}{m}\ln\dfrac{p(t,m+1)}{p(t,1)} - \dfrac{1}{m}\ln h(m), i = 1 \\ -\dfrac{1}{m}\ln\dfrac{p(t,m+1)}{p(t,1)} - \dfrac{1}{m}\ln h^*(m), i = 0 \end{cases}.$$

В таком виде на движения кривой доходности накладываются некоторые дополнительные ограничения. В частности, когда краткосрочные ставки достигают более высокого (низкого) уровня, долгосрочные ставки также поднимаются (опускаются). Однако поскольку движение происходит относительно исходной кривой форвардных ставок, не ограниченной ни какими условиями, кривая доходности может принимать любую форму.

Премия за срок в модели Хо и Ли выражается как

$$\Phi(t,m)=\frac{1}{p(t,1)}\left\{\left[\frac{(1-q)\delta^{m}+q}{(1-\pi)\delta^{m}+\pi}\right]-1\right\}.$$

Премия за срок равна нулю при $\pi=q$. Если $q>\pi$ премия за срок положительная. Долгосрочные облигации имеют более высокую ожидаемую доходность от владения. Таким образом, π может рассматриваться как вероятность достижения определенного состояния для нейтрального по отношению к риску инвестора. Следовательно, если фактическая вероятность q достижения "верхнего" состояния выше, чем π, ожидаемая доходность от владения облигацией должна быть выше, т. е. премия за срок больше нуля.

К недостаткам модели Хо и Ли можно отнести, во-первых, то что она не учитывала существующую у процентных ставок тенденцию возвращения к среднему. Во-вторых, процентные ставки предполагались нормально распределенными, т. е. могли принимать отрицательные значения с положительной вероятностью.

6.2. Однофакторная модель Хита-Джарроу-Мортона

В 1990 году модель Хо и Ли была усовершенствована (*Heath, Jarrow, Morton, 1990*). Авторы допустили возможность изменения характеристик биноминального распределения во времени, оставаясь, тем не менее, в рамках дискретного представления функции цены облигаций. Впоследствии была допущена возможность изменения характеристик функции вероятности изменения цены облигаций в каждый момент времени в виде стохастического (марковского) процесса. Это позволило перейти к непрерывным во времени моделям с отсутствием арбитража (*Heath, Jarrow, Morton, 1992*).

Хит, Джарроу и Мортон рассматривают множество торгуемых дисконтных облигаций с различными сроками до погашения, по которым отсутствует риск дефолта. $p(t, m)$ обозначает цену в момент t облигации со сроком до погашения m. Цены облигаций удовлетворяют следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&p(t+m, m) = 1, \forall m \\
&p(t, m) > 0, \forall t, m \\
&\forall t, m \to \exists \frac{\partial \ln p(t, m)}{\partial m}
\end{aligned}
.
$$

Первое условие нормирует выплаты по облигациям к единице в момент погашения. Второе условие устраняет тривиальное условие арбитража. Третье условие необходимо для существования форвардных ставок, как они определяются ниже.

Мгновенная форвардная ставка в момент времени t для облигации со сроком до погашения m определяется как

$$
f(t, m) = -\frac{\partial \ln p(t, m)}{\partial m}, \forall t, m . \tag{6.1}
$$

Это соответствует ставке, по которой может быть приобретена безрисковая облигация, выпускаемая в момент $t + m$ и погашаемая в следующее мгновение. Решение дифференциального уравнения (6.1) дает нам выражение для цены облигации:

$$
p(t, m) = \exp\left(-\int_{t}^{t+m} f(t, s) ds \right). \tag{6.2}
$$

$$\forall t, m$$

Спот-ставка в момент t, $r(t)$, эквивалентна мгновенной форвардной ставки в момент t для момента t, т. е. $r(t) = f(t, t), \forall t$.

Движение форвардных ставок удовлетворяет уравнению следующего вида:

$$
f(t, m) - f(0, m) = \int_0^t \alpha(s, m, X) ds + \int_0^t \sigma(s, m, X) dz , \tag{6.3}
$$

$$0 \le t \le t + m$$

где X – внешняя переменная состояния, $z(t)$ – Винеровский процесс, определенные интегралы удовлетворяют условиям

$$\int_0^{t+m} \left|\alpha(t, m, X)\right| dt < +\infty$$
$$\int_0^{t+m} \sigma^2(t, m, X) dt < +\infty \; .$$

В такой записи стохастический процесс (в форме броуновского движения) описывает случайные движения *всей* кривой форвардных ставок, начиная от экзогенно заданной начальной кривой $f(0, m)$. Уравнение (6.3) является интегральным выражением для стохастического дифференциального уравнения (интегральная форма более точна)

$$df(t, m) = \alpha(t, m, X)dt + \sigma(t, m, X)dz \, .$$

Определенный нами стохастический процесс динамики форвардных ставок имеет самый общий вид. $\alpha(\bullet)$ и $\sigma(\bullet)$ не имеют изначально заданной функциональной формы и зависят не только от срока до погашения m, но и от внешней переменной состояния X.

Динамка спот-ставки описывается стохастическим процессом в общем виде[18], аналогичным процессу для форвардных ставок, но текущий момент времени и дата погашения меняются для нее одновременно:

$$r(t, X) = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t, X)dt + \int_0^t \sigma(t, m, X)dz \, . \qquad (6.4)$$

Подставив (6.3) в (6.2) с учетом (6.4), после понижения порядка интегрирования и упрощения мы получаем выражение для цены облигации

[18] При соответствующих предпосылках относительно функциональной формы модель Хита-Джарроу-Мортона может быть сведена к любой из рассмотренных ранее стохастических моделей.

$$\ln p(t,m) = \ln p(0,m) + \int_0^t [r(s,X) + b(s,m,X)]ds + -\tfrac{1}{2}\int_0^t a(s,m,X)ds + \int_0^t a(s,m,X)dz$$

$$a(t,m,X) = -\int_t^{t+m} \sigma(t,s,X)ds$$

$$b(t,m,X) = -\int_t^{t+m} \alpha(t,s,X)ds + \tfrac{1}{2}a(t,m,X)^2$$

.(6.5)

Применение леммы Ито для (6.5) позволяет найти цену облигации $p(t, m)$ как аналитическое решение следующего стохастического уравнения:

$$dp(t,m) = [r(t) + b(t,m,X)]p(t,m)dt + a(t,m,X)p(t,m)dz$$

$$a(t,m,X) = -\int_t^{t+m} \sigma(t,s,X)ds \qquad .$$

$$b(t,m,X) = -\int_t^{t+m} \alpha(t,s,X)ds + \tfrac{1}{2}a(t,m,X)^2$$

В общем случае движение цены облигации не является марковским процессом, поскольку функции дрейфа $[r(t) + b(t,m,X)]$ и волатильности $a(t,m,X)$ могут зависеть от прошлой истории броуновского процесса.

Для того чтобы устранить спот-ставку из функции дрейфа, мы будем рассматривать относительные цены облигаций $P(t,m) = \dfrac{p(t,m)}{B(t)}$, где $B(t) = \exp\left(\int_0^t r(\tau)d\tau\right)$ – так называемый аккумуляционный фактор, равный приведенной стоимости инвестиций на денежном рынке под безрисковую ставку процента. Относительная цена облигаций равна:

$$\ln P(t,m) = \ln P(0,m) + \int_0^t b(s,m,X)ds - \tfrac{1}{2}\int_0^t a(s,m,X)ds + \int_0^t a(s,m,X)dz$$

.

Необходимым и достаточным условием того, что определенный выше стохастический процесс динамики форвардных ставок обеспечивает отсутствие возможности для арбитража, приносящего прибыль, является существование единственной эквивалентной мартингальной меры (*equivalent martingale probability measure*). Такая мера существует, если функция дрейфа задана в виде

$$b(t,m,X) = \lambda(t,X)a(t,m,X), \qquad (6.6)$$

где $\lambda(t,X)$ – рыночная цена риска. Подставив в (6.6) выражения для $a(\bullet)$ и $b(\bullet)$ и продифференцировав по m, мы найдем ограничение на функцию дрейфа стохастического процесса форвардных ставок:

$$\alpha(t,m,X) = \sigma(t,m,X)\left(\int_t^{t+m} \sigma(t,s,X)ds + \lambda(t,X)\right).$$

Данные ограничения означают, что параметры процесса спот-ставки и рыночная цена риска не могут быть выбраны *a priori* независимо друг от друга и от динамики цен облигаций, что допускалось в ранее рассмотренных стохастических моделях временной структуры. Независимая спецификация этих процессов может привести к ложным моделям ценообразования. В этом заключается основная критика факторных моделей и моделей общего равновесия со стороны Хита, Джарроу и Мортона. Кроме того, в рассматриваемой модели не является необходимой "инверсия временной структуры" для исключения рыночной цены риска при определении равновесных цен облигаций. Необходимо отметить, что если каждая из предыдущих моделей временной структуры имела ряд собственных ограничений, то модель Хита-Джарроу-Мортона может быть названа слишком общей. В принципе она может включать любое количество факторов, определяющих временную структуру. Однако вычислительные сложности затрудняют использование модели с числом факторов больше одного.

6.3. Модели с отсутствием арбитража Халла-Уайта

В 1990 году Халл и Уайт опубликовали статью, посвященную формированию цен опционов на облигации и процентных свопов (*Hull, White, 1990*). В этой статье авторы представили так называемые "расширенные" модели временной структуры Васичека и Кокса-Ингерсолла-Росса. Данные модели были "расширены" за счет определения среднего значения спот-ставки, скорости возвращения к среднему и дисперсии как функций от времени, т. е.

$dr = [\theta(t) - a(t)r]dt + \sigma(t)dz$ – расширенная модель Васичека;

$dr = [\theta(t) - a(t)r]dt + \sigma(t)\sqrt{r}dz$ – расширенная модель Кокса-Ингерсолла-Росса.

В такой записи рассмотренные факторные модели приняли вид, аналогичный модели Хо и Ли (*Ho, Lee, 1986*), однако в расширенных моделях спот-ставка обладала свойством "возвращения к среднему". Допущение о зависимости параметров стохастического процесса спот-ставки от времени позволяет рассматривать временную структуру процентных ставок как экзогенный фактор, в соответствии с изменением которого меняются параметры стохастического процесса спот-ставки. Халл и Уайт нашли аналитическое решение для процесса спот-ставки в расширенной модели Васичека, в то время как для расширенной модели Кокса-Ингерсолла-Росса возможно только численное решение для конкретного случая.

В 1993 и 1994 годах Халл и Уайт (*Hull, White, 1993, 1994a*) представили непрерывную во времени модель ценообразования опционов на облигации и процентных свопов на основе временной структурой процентных ставок. Динамика спот-ставки описывается триноминальным стохастическим процессом с "возвращением к среднему", параметры которого являются функциями от времени. В качестве экзогенных факторов в модели выступают временная структура и волатильность процентных ставок. Решение для модели Халла-Уайта существует только на основе численных методов.

* * *

К числу прочих работ, в которых представлены непрерывные во времени модели с отсутствием арбитража, относятся статьи (Hull, White, 1990, 1994b; Black, Derman, Toy, 1990; Black, Karasinski, 1991; Constantinides, 1992; Duffie, 1992; Jeffrey, 1995; Schoenbucher, 1997; Stanton, 1997; Ghysels, Ng, 1998; Guo, 1998; Jiang, 1998).

Обзор истории развития и современных представлений о всех классах стохастических моделей можно найти в *Marsh, 1995; Boero, Torricelli, 1996; Campbell, Lo, MacKinlay, 1997; Backus, Foresi, Telmer, 1998*.

7. Различные случаи применения моделей временной структуры

Первые тесты на адекватность факторных стохастических моделей наблюдаемым данным приводились самими авторами моделей в качестве иллюстрации к теоретическим разработкам. Дотан, Бреннан и Шварц, Марш и Розенфельд, Шефер и Шварц, Олдфилд и Рогальски (*Dothan, 1978; Brennan, Schwartz, 1982; Marsh, Rosenfeld, 1983; Schaefer, Schwartz, 1984; Oldfield, Rogalski, 1987*) показали, что предложенные ими виды общего решения уравнения (системы уравнений – для двухфакторных моделей) достаточно хорошо описывает имеющиеся в их распоряжении данные о динамике процентных ставок с различными сроками до погашения.

Широкое применение стохастических уравнений для анализа движения временной структуры процентных ставок началось после опубликования модели общего равновесия Кокса, Ингерсолла, Росса (*Cox, Ingersoll, Ross, 1985b*). В 1986 году Браун и Дибвиг (*Brown, Dybwig, 1986*) предложили дискретную аппроксимацию модели Кокса-Ингерсолла-Росса для эмпирических исследований. Стамбаух (*Stambaugh, 1988*) использовал модель Кокса-Ингерсолла-Росса для проверки гипотезы ожиданий временной структуры. В 1989 году Лонгстафф (*Longstaff, 1989*) показал, что его модель с нелинейной зависимостью премии от уровня безрисковой ставки лучше описывает фактические данные, чем исходная модель общего равновесия с линейной зависимостью премии от безрисковой спот-ставки.

В 1992 году было опубликовано первое сравнительное исследование различных видов стохастического уравнения динамики краткосрочной спот-ставки для факторных моделей и моделей общего равновесия (*Chan, Karolyi, Longstaff, Sanders, 1992*). Результаты сравнения показали, что наиболее распространенные модели (*Vasicek, 1977; Cox, Ingersoll, Ross, 1985b*) хуже работают с фактическими данными, чем менее известные модели (*Dothan, 1978; Cox, Ingersoll, Ross, 1980*).

Впоследствии авторы новых эмпирических исследований работали с несколько видоизмененными, в зависимости от цели исследования, моделями временной структуры, опирающимися на разработанные ранее модели, в первую очередь, на модель Кокса-Ингерсолла-Росса. Полученные ими результаты противоречивы. Авторам не удалось доказать, что какая-либо модель лучше описывает фактические наблюдаемые данные, чем другие. Так, Браун и Шефер (*Brown, Schaefer, 1994, 1996*) показали, что модель общего равновесия Кокса-Ингерсолла-Росса адекватна временной структуре ставок на рынке индексируемых облигаций Великобритании, Йохансон (*Johansson, 1994*) получил аналогичные результаты для шведского межбанковского рынка. Де Мунник и Схотман (*De Munnik, Schotman, 1994*) сравнили соответствие моделей Кокса-Ингерсолла-Росса и Васичека голландскому рынку облигаций и выявили, что первая модель имеет лучшие описательные и прогнозные свойства. В то же время, Пирсон и Сун (*Pearson, Sun, 1994*) отвергли адекватность однофакторной и двухфакторной моделей Кокса-Ингерсолла-Росса рынку американских казначейских облигаций.

Дальнейшее развитие математические методы оценки временной структуры в рамках модели общего равновесия Кокса-Ингерсолла Росса получили в статьях *Gray, 1996; Overbeck, Ryden, 1997; Jiang, Knight, 1997 и др*. Параллельно продолжалось тестирование и альтернативных типов стохастических моделей. Так, Дальквист и Свенссон (*Dahlquist, Svensson, 1996*) сравнили результаты оценки двухфакторной модели общего равновесия Лонгстаффа-Шварца (*Longstaff, Schwartz, 1992*) и однофакторной модели Нельсона-Зигеля (*Nelson, Siegel, 1987*) с целью использования их при проведении денежно-кредитной политики в Швеции. Бальдуцци, Дас и Форези (*Balduzzi, Das, Foresi, 1998*) оценили двухфакторную модель Васичека (в качестве второго фактора была взята центральная тенденция, *central tendency*, изменяющаяся стохастически во времени) и получили лучшие результаты по сравнению с исходной однофакторной моделью. В то же время, Ченг (*Cheng, 1996*) показал, что модель Васичека вполне адекватна данным по коротким ставкам в Гонконге. Вей и Гуо (*Wei, Guo, 1997*) сравнили модели Лонгстаффа-Шварца (*Longstaff, Schwarz, 1992*) и Мертона (*Merton, 1973*) на примере рынка евродолларов и пришли к выводу, что ни одна из моделей не описывает достаточно точно преобладающую форму кривой доходности, хотя модель Мертона имеет некоторое преимущество.

Эмпирические проверки моделей с отсутствием арбитража не так многочислены. Чаще всего их оценки являются частью анализа цен производных финансовых инструментов (опционов, фьючерсов, процентных свопов), использующих в качестве базового актива облигации (см., например, *Pelsser, 1996*).

Сравнительные исследования различных классов стохастических моделей (*Boero, Torricelli, 1996; Raj, Sim, Thurston, 1997*) позволили сделать следующие выводы:

1) Факторные модели и модели общего равновесия имеют явные преимущества в теоретическом обосновании динамики временной структуры, поскольку спот-ставка и премия за срок являются в них эндогенными.

2) Следовательно, эти классы моделей позволяют лучше представить взаимосвязь между финансовым и реальным сектором экономики, например, при исследовании факторов, влияющих на знак и колебания премии за срок.

3) Модели с отсутствием арбитража, поскольку временная структура задается в них экзогенно, лучше описывают (в терминах эконометрики) и предсказывают движение процентных ставок, а также волатильность рынка.

Таким образом, факторные модели и модели общего равновесия предпочтительнее для объяснения причин колебаний уровня спот-ставки, знака и величины премии за срок, в то время как модели с отсутствием арбитража позволяют лучше прогнозировать динамику доходности бумаг с разными сроками до погашения. Модели с отсутствием арбитража получили широкое распространение среди финансовых аналитиков и исследователей производных финансовых инструментов, в то время как первые два класса стохастических моделей используются, преимущественно, для теоретических фундаментальных исследований в области временной структуры процентных ставок.

В настоящее время развитие стохастических моделей (факторных, общего равновесия и с отсутствием арбитража) проходит в направлении включения дополнительных факторов, позволяющих приблизить теоретические построения к реальным наблюдаемым данным.

Обзор форм записи различных классов стохастических моделей для эмпирических исследований можно найти в Chan, Karolyi, Longstaff, Sanders, 1992; Boero, Torricelli, 1996; Cuthbertson, 1996; Campbell, Lo, MacKinlay, 1997; Ferguson, Raymar, 1998.

Приложение
Основы теории стохастических процессов[19]

Основные определения

Стохастическим (случайным) процессом называется движение переменной во времени по траектории, которая может рассматриваться как случайная. Стохастический процесс задается законом распределения вероятности изменения значения x_t переменной x в любой момент времени t. Таким образом, для каждого момента времени $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ задана, или может быть вычислена вероятность того, что соответствующие значения $x_1, x_2, x_3, \dots$ лежат в определенном интервале: $P(a_1 < x_1 \leq b_1, a_2 < x_2 \leq b_2, \dots)$.По мере реализации момента времени t_1 мы наблюдаем фактическое значение x_1 и можем построить, используя эту информацию, новое условное распределение вероятности на будущее.

Различают стационарные и нестационарные стохастические процессы. Статистические свойства (математическое ожидание, дисперсия) *стационарного стохастического процесса* не изменяются во времени, математическое ожидание и дисперсия *нестационарного стохастического процесса* могут возрастать со временем.

Большинство наблюдаемых в экономике процессов являются *дискретными стохастическими процессами*, в том смысле, что рассматриваемые изменения значения переменной происходят с определенной периодичностью (например, еже-

---

[19] В соответствии с *Arnold, 1992; Dixit, Pindyck, 1994; Neftci, 1996*.

дневно, ежемесячно, ежегодно). Тем не менее, в теоретических моделях для упрощения записи чаще используется представление движения рассматриваемой переменной в виде *непрерывных стохастических процессов*.

Наиболее простыми примерами дискретных случайных процессов являются:

1. "Случайное блуждание" $x_t = x_{t-1} + \varepsilon_t$, где ε_t – случайная величина с заданным распределением вероятности.

2. "Случайное блуждание с дрейфом" $x_t = a + x_{t-1} + \varepsilon_t$.

3. Авторегрессионный процесс первого порядка $x_t = \delta + \rho x_{t-1} + \eta_t$, где $-1 < \rho < 1$ и η_t – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием.

Первые два процесса являются нестационарными стохастическими процессами, в то время как авторегрессионный процесс относится к классу стационарных процессов с возвращением к среднему (*mean-reverting process*).

"Случайное блуждание" (с дрейфом или без) и авторегрессионный процесс относятся к классу марковских процессов (как в дискретном, так и в непрерывном выражении). Стохастический процесс является *марковским процессом*, если распределение вероятности для x_{t+1} зависит только от x_t и не зависит от прошлой истории движения переменной до момента времени t. Непрерывный марковский процесс называется *диффузионным процессом*.

Винеровский процесс

Винеровским процессом (или *броуновским движением*) называется непрерывный стохастический процесс, обладающий тремя свойствами:

1) Он является Марковским процессом, т. е. распределения вероятности для всех будущих значений зависят только от текущего состояния и не зависят от прошлых значений или других факторов.

2) Приращения независимы друг от друга в разные моменты времени, т. е. распределение вероятности приращений за

определенной период времени не зависит от распределения вероятности на другом (не перекрывающем) периоде времени.

3) Приращения на любом конечном временном интервале распределены нормально, а их дисперсия линейно возрастает со временем.

Если какой-либо стохастический процесс $z(t)$ является Винеровским процессом, тогда любое приращение, Δz, соответствующее периоду времени Δt, удовлетворяет следующим условиям:

1. Соотношение между Δz и Δt задается как

$$\Delta z = \varepsilon_t \sqrt{\Delta t} ,$$

где ε_t – нормально распределенная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением, равным единице.

2. Случайная величина ε_t серийно не коррелирована, т. е. $\mathrm{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s] = 0, t \neq s$. Таким образом, значения Δz для двух различных временных интервалов независимы друг от друга.

Рассмотрим подробнее эти два условия для $z(t)$ на некотором конечном интервале времени T. Разобьем данный период времени на n отрезков продолжительностью Δt каждый, т. е. $n = T/\Delta t$. Тогда общее изменение z за весь период времени будет определяться как

$$z(s+T) - z(s) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t} .$$

Поскольку ε_i независимы друг от друга, мы можем применить центральную предельную теорему к сумме, стоящей в правой части. Согласно данной теореме, изменение $z(s+T) - z(s)$ нормально распределено с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $n\Delta t = T$. Последнее выражение, которое следует из того, что Δz зависит от Δt, а не от t, особенно важно: дисперсия приращений Винеровского процесса увеличивается линейно со временем. Таким образом, Винеровский процесс не стационарен. В долгосрочном периоде его дисперсия растет до бесконечности.

Принимая Δt бесконечно малым, мы можем представить приращение непрерывного Винеровского процесса, dz , как

$$dz = \varepsilon_t \sqrt{dt} \;.$$

Поскольку ε_t имеет нулевое математическое ожидание и единичное стандартное отклонение, математическое ожидание приращения $E(dz) = 0$, а дисперсия $D(dz) = E[(dz)^2] = dt$. Заметим, что Винеровский процесс не имеет производной по времени в обычном понимании: $\dfrac{\Delta z}{\Delta t} = \varepsilon_t \dfrac{1}{\sqrt{\Delta t}}$ стремится к бесконечности при Δt стремящемся к нулю.

Рассмотрим ковариацию двух или более Винеровских процессов. Пусть $z_1(t)$ и $z_2(t)$ – Винеровские процессы. Тогда $E(dz_1 dz_2) = \rho_{12} dt$, где ρ_{12} – коэффициент корреляции между этими двумя процессами. Так как Винеровский процесс имеет мгновенные дисперсию и стандартное отклонение, равные единице ($E[(dz)^2]/dt = 1$), ρ_{12} является также ковариацией между этими двумя процессами в единицу времени.

Броуновское движение с дрейфом. Одним из наиболее простых стохастических процессов, включающих Винеровский процесс, является броуновское движение с дрейфом:

$$dx = \alpha dt + \sigma dz \,,$$

где dz – приращение Винеровского процесса, α – параметр дрейфа, σ – параметр вариации. На любом интервале времени, Δt, изменение x, обозначаемое Δx, нормально распределено и имеет математическое ожидание $E(\Delta x) = \alpha \Delta t$ и дисперсию $D(\Delta x) = \sigma^2 \Delta t$.

Обобщенное броуновское движение – процессы Ито

Винеровские процессы используются для построения большего числа стохастических моделей. Наиболее часто используемыми являются различные варианты броуновского движения с дрейфом. Общая форма записи непрерывного броуновского движения с дрейфом называется *процессом Ито* (*Ito process*):

$$dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz, \quad (1)$$

где *x(t)* – процесс Ито, *dz* – приращение Винеровского процесса, *a*(*x, t*) и *b*(*x, t*) – известные (неслучайные) функции. В наиболее общей форме дрейф и дисперсия являются функциями от текущего состояния и времени. Математическое ожидание $\mathrm{E}(dx) = a(x,t)dt$, поскольку $\mathrm{E}(dz) = 0$. Дисперсия приращений процесса Ито равна $\mathrm{E}(dx^2) - \mathrm{E}(dx)^2$ и содержит члены, включающие *dt*, $(dt)^2$ и (*dz*)(*dt*), т. е. со степенью $(dt)^{3/2}$. При бесконечно малых *dt* членами с $(dt)^2$ и $(dt)^{3/2}$ можно пренебречь, и дисперсия приращений равна $D(dx) = b^2(x,t)dt$.

Геометрическое броуновское движение. Одним из наиболее важных типов процессов Ито является *геометрическое броуновское движение с дрейфом*. Его параметры равны $a(x,t) = \alpha, b(x,t) = \sigma x$, где α и σ – константы. Общий вид записи уравнения:

$$dx = \alpha dt + \sigma x dz.$$

Математическое ожидание значения процесса $\mathrm{E}[x(t)] = x_0 e^{\alpha t}$, дисперсия – $D[x(t)] = x_0^2 e^{2\alpha t}(e^{\sigma^2 t} - 1)$, где x_0 = *x*(0).

Процесс с возвращением к среднему. Другой важный случай процесса Ито – процесс с возвращением к среднему (или процесс Орнстейна – Уленбека):

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz,$$

где η – скорость возвращения к среднему, $\bar{x}$ – "нормальный" уровень *x*, к которому возвращается значение процесса. Ожидаемое приращение процесса зависит от отклонения значения процесса от "нормального" уровня. Если *x* больше (меньше) $\bar{x}$, то наиболее вероятно, что значения процесса будут понижаться (расти) на протяжение следующего периода времени. Таким образом, хотя процесс с возвращением к среднему и является Марковским процессом, его приращения не независимы.

Математическое ожидание процесса в любой момент времени t равно $\mathrm{E}(x_t) = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta t}$, а дисперсия отклонения от "нормального" уровня – $D(x_t - \bar{x}) = \frac{\sigma_2}{2\eta}(1 - e^{-2\eta t})$. Заметим, что ожидаемое значение x_t стремится к $\bar{x}$ при $t \to \infty$, а дисперсия стремится к $\frac{\sigma^2}{2\eta}$. Кроме того, при $\eta \to \infty$ дисперсия отклонений стремится к нулю, что означает, что значения процесса не могут отклоняться от "нормального" уровня даже на короткие отрезки времени. При $\eta \to 0$ процесс становится идентичен простому броуновскому движению, а дисперсия процесса $D(x_t) \to \sigma^2 t$.

Более общие формы процесса с возвращением к среднему могут включать функции дисперсии и дрейфа, пропорциональные значению процесса:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma x\,dz$$
$$dx = \eta x(\bar{x} - x)dt + \sigma x\,dz.$$

<u>Лемма Ито</u>

Как уже было сказано, процесс Ито непрерывен, но не имеет обычной производной по времени. Однако при работе со стохастическими процессами в экономических моделях часто требуется нахождение производной по времени от рассматриваемой функции. Правила дифференцирования и интегрирования функций стохастических процессов типа процесса Ито определяются леммой Ито (*Ito's Lemma*).

Наиболее простым представлением леммы Ито является разложение функции процесса в ряд Тейлора. Допустим, что $x(t)$ – процесс Ито, и рассмотрим функцию $F(x, t)$, которая, по крайней мере, дважды дифференцируема по x и один раз по t. Полный дифференциал функции $F(x, t)$ с учетом членов только первого порядка равен:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial t}dt.$$

Запишем полный дифференциал функции $F(x, t)$ с учетом производных по x более высокого порядка:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \tfrac{1}{2!} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2 + \tfrac{1}{3!} \frac{\partial^3 F}{\partial x^3} (dx)^3 + \ldots \qquad (2)$$

Обычно члены выше первого порядка стремятся к нулю. Для проверки этого свойства для уравнения (2) найдем члены второго и третьего порядка. Во-первых, найдем $(dx)^2$ из уравнения (1):

$$(dx)^2 = a^2(x,t)(dt)^2 + 2a(x,t)b(x,t)(dt)^{3/2} + b^2(x,t)dt\,. \qquad (3)$$

Члены с $(dt)^2$ и $(dt)^{3/2}$ стремятся к нулю быстрее, чем с dt, поэтому мы можем их отбросить: $(dx)^2 = b^2(x,t)dt$.

Все члены с производной третьего порядка по x содержат dt в степени выше первой. Тоже самое относится ко всем производным функции $F(x, t)$ по x более высокого порядка.

Лемма Ито. Для стохастического процесса x, заданного стохастическим дифференциальным уравнением $dx = a(x,t)dt + b(x,t)dz$, и некоторой функции F(x, t) от этого процесса, достаточно раз дифференцируемой по x и t, полный дифференциал функции F равен:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial x} dx + \tfrac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} (dx)^2, \qquad (4)$$

или

$$dF = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial F}{\partial x} + \tfrac{1}{2} b^2(x,t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right] dt + b(x,t) \frac{\partial F}{\partial x} dz\,.$$

(5)

По сравнению с обычной записью полного дифференциала уравнение (5) содержит один дополнительный член. Чтобы понять его смысл, рассмотрим, для простоты, случай с функцией дрейфа $a(x, t) = 0$ и $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$. При этом $\mathrm{E}(dx) = 0$, но

$\mathrm{E}(dF) \neq 0$. Это одно из следствий выполнения неравенства Дженсена. Математическое ожидание полного дифференциала $F(x, t)$ положительное, если F – выпуклая функция по x (т. е. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0$), и отрицательное, если F – вогнутая функция по x (т. е. $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0$). Для процесса Ито dx ведет себя как $\sqrt{dt}$, а $(dx)^2$ – как dt. Таким образом, вогнутость или выпуклость функции зависит от члена второго порядка, включающего приращение времени dt, и который не может быть отброшен при записи полного дифференциала F. Дополнительное слагаемое в уравнении (4) учитывает это свойство рассматриваемой функции.

Для функции нескольких процессов Ито разложение в ряд Тейлора будет аналогичным. Предположим, что $F = F(x_1, \ldots, x_m, t)$ – функция времени и m процессов Ито $x_1, \ldots, x_m$, где

$$\begin{aligned} & dx_i = a_i(x_1, \ldots, x_m, t)dt + b_i(x_1, \ldots, x_m, t)dz_i \\ & i = 1, \ldots, m \end{aligned}, \qquad (6)$$

и $\mathrm{E}(dz_i dz_j) = \rho_{12} dt$. Тогда полный дифференциал функции F согласно лемме Ито определяется как:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i} dx_i + \tfrac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j \,. \qquad (7)$$

Подставив (6) в (7) получаем полную запись уравнения (7):

$$dF = [\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_i a_i(x_1, \ldots, t) \frac{\partial F}{\partial x_i} + \tfrac{1}{2} \sum_i b_i^2(x_1, \ldots, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} +$$

$$+ \sum_{i \neq j} \rho_{12} b_i(x_1, \ldots, t) b_j(x_1, \ldots, t) \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}]dt + \sum_i b_i(x_1, \ldots, t) \frac{\partial F}{\partial x_i} dz_i \,.$$

Литература

1. Буклемишев О., Поманский А. Премия за риск и временная структура процентных ставок. //*Экономика и математические методы*, № 28-2, 1992, стр. 252 – 260.

2. Синельников С., Архипов С., Баткибеков С., Дробышевский С., Трунин И. Кризис финансовой системы России: основные факторы и экономическая политика. //*Вопросы экономики*, № 11, 1998, стр. 36–64.

3. Шарп У., Александр Г., Бэйли Дж. *Инвестиции*. – М.: ИНФРА-М, 1998.

4. Энтов Р., Радыгин А., Мау В., Синельников С., Трофимов Г., Анисимова Л., Архипов С., Дробышевский С., Золотарева А., Луговой О., Шадрин А., Шкребела Е. *Развитие российского финансового рынка и новые инструменты привлечения инвестиций*. – М.: ИЭППП, 1998.

5. Abel, A. (1998) 'Risk premia and term premia in general equilibrium', *NBER Working paper,* 6683.

6. Alles, L. (1995) 'The Australian term structure as a predictor of real economic activity', *Australian Economic Review*, 112, pp. 71 – 85.

7. Alles, L, R. Bhar (1997) 'The information on inflation in the Australian term structure', *Applied Financial Economics,* 7, pp. 721 - 730.

8. Anderson, N., F. Breedon, M. Deacon, A. Derry, G. Murphy (1996) *Estimating and Interpreting the Yield Curve*. John Wiley & Sons Ltd.

9. Ang, A., G. Bekaert (1998) 'Regime switching in interest rates', *NBER working paper*, 6508.

10. Arnold, L. (1992) *Stochastic Differential Equations: Theory and Applications*. Krieger Publishing Co.

11. Backus, D., S. Foresi, C. Telmer (1998) 'Discrete-time models of bond pricing', *NBER Working paper*, 6736.

12. Backus, D., A. Gregory, S. Zin (1989) 'Risk premium in the term structure', *Journal of Monetary Economics*, 24, pp. 371 – 399.

13. Baldini, N., U. Cherubini (1998) 'Yield curve movements and market segmentation: A LISREL analysis of the Italian case', *Economic Notes by Banca Monte dei Paschi di Siena SpA*, 27, pp. 35 - 54.

14. Balduzzi, P., G. Bertola, S. Foresi (1997) 'A model of target changes and the term structure of interest rates', *Journal of Monetary Economics*, 39, pp. 223 – 249.

15. Balduzzi, P., G. Corsetti, S. Foresi (1997) 'Yield-curve movements and fiscal retrenchments' *European Economic Review*, 41, pp. 1675 - 1685.

16. Balduzzi, P., S. R. Das, S. Foresi (1998) 'The central tendency: A second factor in bond yields', *Review of Economics and Statistics*, 80, pp. 62 – 72.

17. Barr, D., J. Campbell (1996) 'Inflation, real interest rates, and the bond market: A study of UK nominal and index-linked government bond prices', *NBER Working papers*, 5821.

18.Barro, R. (1974) 'Are government bonds net wealth?', *Journal of Political Economy*, 82, pp. 1095 – 1117.

19.Barsky, R. (1987) 'The Fisher hypothesis and the forecastability and persistence of inflation', *Journal of Monetary Economics*, 19, pp. 3 – 24.

20.Beaglehole, D., M. Tenney (1992) 'Corrections and additions to 'A non-linear equilibrium model of the term structure of interest rates'', *Journal of Financial Economics*, 32, pp. 345 – 353.

21.Bekaert, G., R. Hodrick, D. Marshall (1997) 'On biases in tests of the expectations hypothesis of the term structure of interest rates', *Journal of Financial Economics*, 44, pp. 309 - 348.

22.Berk, J. (1998) 'The information content of the yield curve for monetary policy: A survey', *Economist-Leiden*, 146, pp. 303 - 320.

23.Bhar, R. (1996) 'Modelling Australian bank bill rates: A Kalman filter approach', *Accounting and Finance*, 36, pp. 1 – 14.

24.Bierwag, G., M. Grove (1967) 'A model of the term structure of interest rates', *Review of Economics and Statistics*, 49, pp. 50 – 62.

25.Black, F., M. Scholes (1973) 'The pricing of options and corporate liabilities', *Journal of Political Economy*, 81, pp. 637 – 654.

26.Black, F., E. Derman, W. Toy (1990) 'A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options', *Financial Analysts Journal*, Spring 1990, pp. 33 – 39.

27.Black, F., P. Karasinski (1991) 'Bond and option pricing when short rates are lognormal', *Financial Analysts Journal*, July – August 1991, pp. 52 – 59.

28. Blanchard, O. (1981) 'Output, the stock market, and interest rates', *American Economic Review*, 71, pp. 132 – 143.

29. Blanchard, O., S. Fisher (1989) *Lectures on Macroeconomics*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

30. Bliss, R. (1997) 'Movements in the term structure of interest rates', *Economic Review (Federal Reserve Bank of Atlanta),* 82, pp. 16 – 33.

31. Bliss, R., E. Ronn (1989) 'Arbitrage-based estimation of nonstationary shifts in the term structure of interest rates', *Journal of Finance*, 44, pp. 591 – 610.

32. Boero, G., C. Torricelli (1996) 'A comparative evaluation of alternative models of the term structure of interest rates', *European Journal of Operational Research*, 93, pp. 205 – 223.

33. Bohm-Bawerk, E. (1891) *The positive theory of capital*. G. E. Stechert & Co.

34. Bollerslev, T. (1986) 'Generalised autoregressive conditional heteroskedasticity', *Journal of Econometrics,* 31, pp. 307 – 327.

35. Bomhoff, E., P. Schotman, V. Grilli, L. Leiderman (1988) 'The term structure in the United States, Japan, and West Germany. Comments', *Carnegie-Rochester Conference on Public Policy*, 28, pp. 269 – 323.

36. Bradley, M., S. Lumpkin (1992) 'The treasury yield curve as a cointegrated system', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27, pp. 449 – 463.

37. Brealey, R., S. Myers (1991) *Principles of Corporate Finance*. 4th ed. McGraw-Hill, Inc.

38. Breeden, D. (1986) 'Consumption, production, inflation and interest rates: a synthesis', *Journal of Financial Economics*, 16, pp. 3 – 39.

39. Brennan, M., E. Schwartz (1982) 'An equilibrium model of bond pricing and a test of market efficiency', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27, pp. 301 – 329.

40. Brown, S., P. Dybwig (1986) 'The empirical implications of the Cox, Ingersoll, Ross theory of the term structure of interest rates', *Journal of Finance*, 41, pp. 616 – 630.

41. Brown, R., S. Schaefer (1994) 'The term structure of real interest rates and the Cox, Ingersoll, and Ross model', *Journal of Financial Economics*, 35, pp. 3 – 42.

42. Brown, R., S. Schaefer (1996) 'Ten years of the real term structure: 1984 – 1994', *Journal of Fixed Income*, 5, pp. 6 – 22.

43. Buse, A. (1967) 'Interest rates, the Meiselman model and random numbers', *Journal of Political Economy*, 75, pp. 49 – 62.

44. Campbell, J. (1986) 'A defense of traditional hypothesis about the term structure of interest rates', *Journal of Finance*, 41, pp. 183 – 193.

45. Campbell, J. (1987) 'Stock returns and the term structure', *Journal of Financial Economics*, 18, pp. 373 – 399.

46. Campbell, J. (1995) 'Some lessons from the yield curve', *NBER working papers*, 5031.

47. Campbell, J., R. Shiller (1991) 'Yield spreads and interest rate movements: A bird's eye view', *Review of Economic Studies*, 58, pp. 495 – 514.

48. Campbell, J., A. Lo, A. C. MacKinlay (1997) *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton: Princeton University Press.

49. Cebula, R. (1991) 'A note on Federal budget deficits and the term structure of real interest rates in the United States', *Southern Economic Journal*, 57, pp. 1170 – 1173.

50. Chapman, D. (1997) 'The cyclical properties of consumption growth and the real term structure', *Journal of Monetary Economics*, 39, pp. 145 – 172.

51. Chan, K., G. A. Karolyi, F. Longstaff, A. Sanders (1992) 'An empirical comparison of alternative models of the short-term interest rate', *Journal of Finance*, 47, pp. 1209 – 1227.

52. Chen, Nai-fu (1991) 'Financial investment opportunities and the macroeconomy', *Journal of Finance*, 46, pp. 529 – 544.

53. Chen, R., L. Scott (1992) 'Pricing interest rate options in a two-factor Cox-Ingersoll-Ross model of the term structure', *Review of Financial Studies*, Winter 1992, pp. 613 – 636.

54. Chen, R., L. Scott (1993) 'Maximum likelihood estimation for a multifactor equilibrium model of the term structure of interest rates', *Journal of Fixed Income*, 3, pp. 14 – 31.

55. Cheng, J. (1996) 'The intertemporal behavior of short-term interest rates in Hong Kong', *Journal of Business Finance & Accounting*, 23, pp. 1059 – 1068.

56. Choi, S., M. Wohar (1991) 'New evidence concerning the expectations theory for the short end of the maturity spectrum', *Journal of Financial Research*, 14, pp. 83 – 92.

57. Clinebell, J., D. Kahn, J. Stevens (1996) 'Time series estimation of the bond default risk premium', *Quarterly Review of Economics and Finance*, 36, pp. 475 – 484.

58. Clinton, K. (1995) 'The term structure of interest rates as a leading indicator of economic activity: A technical note', *Bank of Canada Review*, Winter 1994/95, pp. 23 – 40.

59.Coleman, T., L. Fisher, R. Ibbotson (1992) 'Estimating the term structure of interest rates from data that include the prices of coupon bonds', *Journal of Fixed Income*, 2, pp. 85 – 116.

60.Constantinides, G. (1992) 'A theory of the nominal term structure of interest rates', *The Review of Financial Studies*, 5, pp. 531 - 552.

61.Correia-Nunes, J., L. Stemitsiotis (1995) 'Budget deficit and interest rates: Is there a link? International evidence', *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 57, pp. 425 – 449.

62.Cox, J., J. Ingersoll, S. Ross (1980) 'An analysis of variable rate loan contracts', *Journal of Finance*, 35, pp. 389 – 403.

63.Cox, J., J. Ingersoll, S. Ross (1985a) 'An intertemporal general equilibrium model of asset prices', *Econometrica*, 53, pp. 363 – 384.

64.Cox, J., J. Ingersoll, S. Ross (1985b) 'A theory of the term structure of interest rates', *Econometrica*, 53, pp. 385 – 407.

65.Cox, J., S. Ross (1976) 'The valuation of options for alternative stochastic processes', *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 145 – 166.

66.Crockett, J. (1998) 'Rational expectations, inflation and the nominal interest rate', *Journal of Econometrics*, 83, pp. 349 - 363.

67.Crowder, W., D. Hoffman (1996) 'The long-run relationship between nominal interest rates and inflation: The Fisher equation revisited', *Journal of Money, Credit, and Banking*, 28, pp. 102 – 118.

68.Culbertson, J. (1957) 'The term structure of interest rates', *Quarterly Journal of Economics*, 71, pp. 485 – 517.

69. Cuthbertson, K. (1996) *Quantitative Financial Economics*. John Wiley & Sons Ltd.

70. Cuthbertson, K., S. Hayes, D. Nitzsche (1998) 'Interest rates in Germany and the UK: Cointegration and error correction models', *Manchester School of Economic and Social Studies*, 66, pp. 27 – 43.

71. Dahlquist, M. (1995) 'Essays on the term structure of interest rates and monetary oilicy', *PhD. thesis (*Institute for International Economic Studies, University of Stockholm).

72. Dahlquist, M., L. Svensson (1996) 'Estimating the term structure of interest rates for monetary policy analysis', *Scandinavian Journal of Economics*, 98, pp. 163 – 183.

73. Day, T. (1986) 'Information, production, and the term structure', *Journal of Political Economy*, 94, pp. 167 – 184.

74. De Bondt, W., M. Bange (1992) 'Inflation forecast errors and time variation in term premia', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 27, pp. 479 – 496.

75. De Munnik, J., P. Schotman (1994) 'Cross-section versus time series estimation of term structure models: Empirical results for the Dutch bond market', *Journal of Banking and Finance*, 18, pp. 997 – 1025.

76. Deventer, D. van, K. Imai (1997) *Financial Risk Analytics: A Term Structure Model Approach for Banking, Insurance and Investment Management*. Irwin.

77. Dhillon, U., D. Lasser (1998) 'Term premium estimates from zero-coupon bonds: New evidence on the expectations hypothesis', *Journal of Fixed Income*, 8, pp. 52 - 58.

78. Dillen, H. (1997) 'A model of the term structure of interest rates in an open economy with regime shifts', *Journal of International Money and Finance*, 16, pp. 795 – 819.

79. Diller, S. (1969) 'Expectations and the term structure of interest rates' in *Economic Forecasts and Expectations*, ed. by J. Mincer. NY: NBER.

80. Dixit, A., R. Pindyck (1994) *Investment under Uncertainty*. Princeton: Princeton University Press.

81. Domowitz, I., J. Glen, A. Madhaven (1998) 'Country and currency risk premia in an emerging markets', *Journal of Financial and Quanitative Analysis*, 33, pp. 189 - 216.

82. Dothan, Uri L. (1978) 'On the term structure of interest rates', *Journal of Financial Economics*, 6, pp. 59 – 69.

83. Driffil, J., Z. Psaradakis, M. Sola (1997) 'A reconciliation of some paradoxical empirical results on the expectations model of the term structure', *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 59, pp. 29 - 42.

84. Duffee, G. (1996) 'Idiosyncretic variation of Treasury bill yields', *Journal of Finance*, 51, pp. 527 – 551.

85. Duffie, D. (1992) *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton: Princeton University Press.

86. Duffie, D., R. Kan(1996) 'A yield-factor model of interest rates', *Mathematical Finance*, 6, pp. 379 – 406.

87. Eckwert, B. (1996) 'Equilibrium term structure relations of risky assets in incomplete markets', *Quarterly Journal of Economics and Finance*, 36, pp. 327 – 346.

88. Ederington, L., J. Goh (1997) 'A variance decomposition analysis of the information in the term structure', *Journal of Financial Research*, 20, pp. 71 – 91.

89. Elton, E., T. C. Green (1998) 'Tax and liquidity effects in pricing government bonds', *Journal of Finance,* 53, pp. 1533 - 1562.

90. Elton, E., M. Gruber, J. Rentzler (1983) 'Intra-day tests of the efficiency of the Treasury bill futures market', *Review of Economics and Statistics*, 65, pp. 129 – 137.

91. Elton, E., M. Gruber, J. Mei (1996) 'Return generating process and the determinants of term premiums', *Journal of Banking and Finance*, 20, pp. 1251 – 1269.

92. Engle, R. (1982) 'Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation', *Econometrica*, 50, pp. 987 – 1008.

93. Engle, R., V. Ng (1993) 'Time-varying volatility and the dynamic behavior of the term structure', *Journal of Money, Credit, and Banking*, 25, pp. 336 – 349.

94. Engle, R., V. Ng, M. Rothschild (1990) 'Asset pricing with a FACTOR-ARCH covariance structure: Empirical estimates for treasury bills', *Journal of Econometrics*, 45, pp. 213 – 237.

95. Engsted, T. (1993) 'The term structure of interest rates in Denmark 1982 – 1989: Testing the rational expectations / constant liquidity premium theory', *Bulletin of Economic Research*, 45, pp. 19 – 37.

96. Engsted, T. (1995) 'Does the long-term interest rate predict future inflation? A multi-country analysis', *Review of Economics and Statistics*, 77, pp. 42 – 54.

97.Engsted, T. (1996) 'The predictive power of the money market term structure', *International Journal of Forecasting*, 12, pp. 289 – 295.

98.Engsted, T., C. Tanggaard (1994a) 'Cointegration and the US term structure', *Journal of Banking and Finance*, 18, pp. 167 – 181.

99.Engsted, T., C. Tanggaard (1994b) 'A cointegration analysis of Danish zero-coupon bond yields', *Applied Financial Economics*, 4, pp. 265 – 278.

100.Estrella, A., G. Hardouvelis (1991) 'The term structure as a predictor of real economic activity', *Journal of Finance*, 46, pp. 555 – 576.

101.Estrella, A., F. Mishkin (1995) 'The term structure of interest rates and its role in monetary policy for the European central bank', *NBER Working paper*, 5279.

102.Estrella, A., F. Mishkin (1997) 'The predictive power of the term structure of interest rates in Europe and the United States: Implications for the European central bank', *European Economic Review, 41,* pp. 1375 - 1401.

103.Estrella, A., F. Mishkin (1998) 'Predicting U.S. recessions: Financial variables as leading indicators', *Review of Economics and Statistics*, 80, pp. 45 - 61.

104.Evans, M. (1998) 'Real rates, expected inflation, and inflation risk premia', *Journal of Finance*, 53, pp. 187 - 218.

105.Evans, C., D. Marshall (1998) 'Monetary policy and the term structure of nominal interest rates: evidence and theory', *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy*, 49, pp. 53 - 111.

106.Fama, E. (1975) 'Short-term interest rates as predictors of inflation', *American Economic Review*, 65, pp. 269 – 282.

107.Fama, E. (1984) 'The information in the term structure', *Journal of Financial Economics*, 13, pp. 509 – 528.

108.Fama, E. (1990) 'Term-structure forecasts of interest rates, inflation, and real returns', *Journal of Monetary Economics*, 25, pp. 59 – 76.

109.Fama, E., R. Bliss (1987) 'The information in long-maturity forward rates', *American Economic Review*, 77, pp. 680 – 692.

110.Ferguson, R., S. Raymar (1998) 'A comparative analysis of several popular term structure estimation models', *Journal of Fixed Income*, 7, pp. 17 - 33.

111.Fisher, I. (1896) 'Appreciation and interest', *Publications of the American Economic Association*, pp. 23 – 29 and 88 – 92.

112.Fisher, I. (1930) *Theory of Interest*. NY: Macmillan.

113.Fisher, M., C. Gilles (1998) 'Around and around: The expectations hypothesis', *Journal of Finance*, 53, pp. 365 - 383.

114.Flavin, M. (1983) 'Excess volatility in the financial markets: A reassessment of the empirical evidence', *Journal of Political Economy*, 91, pp. 929 – 956.

115.Fong, H. G., O. Vasicek (1991) 'Fixed-income volatility management', *Journal of Portfolio Management*, Summer 1991.

116.Fornari, F., A. Mele (1995) 'Continuous time conditionally heteroskedastic models: Theory with applications to the term structure of interest rates, *Economic Notes (Banca Monte dei Paschi di Siena SpA)*, 24, pp. 327 – 352.

117.Fraser, P. (1995) 'UK stock and government bond markets: Predictability and the term structure', *Applied Financial Economics*, 5, pp. 61 – 67.

118.Friedman, B. (1979) 'Interest rate expectations versus forward rates: Evidence from an expectations survey', *Journal of Finance,* 34, pp. 965 – 973.

119.Friedman, B. (1980) 'Survey evidence on the rationality of interest rate expectations', *Journal of Monetary Economics*, 6, pp. 453 – 465.

120.Friedman, B., K. Kuttner (1994) 'Why does the paper-bill spread predict real economic activity?', *NBER Working papers*, 3879.

121.Froot, K. (1989) 'New hope for the expectations hypothesis of the term structure of interest rates', *Journal of Finance*, 44, pp. 283 – 305.

122.Gerlach, S., F. Smets (1997) 'The term structure of Euro-rates: Some evidence in support of the expectations hypothesis', *Journal of International Money and Finance*, 16, pp. 305 - 321.

123.Ghysels, E., S. Ng (1998) 'A semiparametric factor model of interest rates and tests of the affine term structure', *The Review of Economics and Statistics*, 80, pp. 535 - 548.

124.Goff, B. (1990) 'Federal deficit effects on short and long term rates: A note on Hoelscher', *Southern Economic Journal*, 57, pp. 243 – 248.

125.Gong, F., E. Remolona (1997) 'Two factors along the yield curve', *Manchester School of Economic and Social Studies*, 65, pp. 1 - 31.

126.Goodfriend, M. (1998) 'Using the term structure of interest rates for monetary policy', *Economic Quarterly (Federal Reserve Bank of Richmond)*, 84, pp. 13 - 30.

127.Gray, S. (1996) 'Modelling the conditional distribution of interest rates as a regime switching process', *Journal of Financial Economics*, 42, pp. 27 – 62.

128.Green, R., B. Odegaard (1997) 'Are there tax effects in the relative pricing of U.S. government bonds?', *Journal of Finance*, 52, pp. 609 - 633.

129.Guest, R., A. McLean (1998) 'New evidence on the expectations theory of the term structure of Australian Commonwealth Government Treasury yields', *Applied Financial Economics*, 8, pp. 81 – 87.

130.Guo, C. (1998) 'A decomposition of the term structure model of Heath, Jarrow, Morton', *Applied Financial Economics*, 8, pp. 111 – 118.

131.Hamilton, J. (1988) 'Rational-expectations econometric analysis of changes in regime: An investigation of the term structure of interest rates', *Journal of Economic Dynamics & Control*, 12, pp. 385 – 423.

132.Harvey, C. (1988) 'The real term structure and consumption growth', *Journal of Financial Economics*, 22, pp. 305 – 333.

133.Harvey, C. (1989) 'Forecasts of economic growth from the bond and stock markets', *Financial Analysts Journal*, 45, pp. 38 – 45.

134.Harvey, C. (1993) 'Term structure forecasts economic growth', *Financial Analysts Journal*, 49, pp. 6 – 8.

135. Harvey, C. (1997) 'The relation between the term structure of interest rates and Canadian economic growth', *Canadian Journal of Economics*, 30, pp. 169 – 193.

136. Hassler, U., D. Nautz (1998) 'Der Zusammenhang zwischen kurz- und langfristigen Zinssaetzen in Deutschland', *Jahrbucher fuer Nationaloeconomie und Statistik*, 217/2, s. 214 – 226.

137. Heath, D., R. Jarrow, A. Morton (1990) 'Bond pricing and the term structure of interest rates: A discrete time approximation', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 25, pp. 419 – 440.

138. Heath, D., R. Jarrow, A. Morton (1992) 'Bond pricing and the term structure of interest rates: New methodology for contingent claims valuation', *Econometrica*, 60, pp. 77 – 105.

139. Heynen, R., A. Kemna, T. Vorst (1994) 'Analysis of the term structure of implied volatilities', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, pp. 31 – 56.

140. Hickman, W. (1942) *The term structure of interest rates: An exploratory analysis*. NY: NBER.

141. Hicks, J. (1946) *Value and capital*. 2nd ed. Oxford: Oxford University Press. // Хикс Дж. *Стоимость и капитал*. М.: "Прогресс", 1993.

142. Ho, T., Sang-Bin Lee (1986) 'Term structure movements and pricing interest rate contingent claims', *Journal of Finance*, 41, pp. 1011 – 1029.

143. Hu, Z. (1993) 'The yield curve and real activity', *IMF Staff Papers*, 40, pp. 781 – 806.

144. Hull, J., A. White (1990) 'Pricing interest-rate-derivative securities', *Review of Financial Studies*, 3, pp. 573 – 592.

145.Hull, J., A. White (1993) 'One-factor interest-rate models and the valuation of interest-rate derivative securities', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, pp. 235 – 254.

146.Hull, J., A. White (1994a) 'Numerical procedures for implementing term structure models I: Single-factor models', *Journal of Derivatives*, Fall 1994, pp. 7 – 16.

147.Hull, J., A. White (1994b) 'Numerical procedures for implementing term structure models II: Two-factor models', *Journal of Derivatives*, Fall 1994, pp. 37 – 48.

148.Jeffrey, A. (1995) 'Single factor Heath-Jarrow-Morton term structure models based on Markov spot interest rate dynamics', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30, pp. 619 – 642.

149.Jiang, G. (1998) 'Nonparametric modeling of U.S. interest rate term structure dynamics and implications on the prices of derivative securities', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33, pp. 465 - 497.

150.Jiang, G., J. Knight (1997) 'A nonparametric approach to the estimation of diffusion processes, with an application to a short-term interest rate model', *Econometric Theory*, 13, pp. 615 – 645.

151.Johansson, A. (1994) 'Models of a short term interest rate', *NEIHS Memorandum*, 196.

152.Johnson, D. (1993) 'International interest rate linkages in the term structure', *Journal of Money, Credit, and Banking*, 25, pp. 755 – 770.

153.Johnson, P. (1994) 'On the number of common unit roots in the term structure of interest rates', *Applied Economics*, 26, pp. 815 – 820.

154.Jones, C., O. Lamont, R. Lumsdaine (1996) 'Public information and the persistence of bond market volatility', *NBER Working Paper*, 5446.

155.Jorion, P., F. Mishkin (1991) 'A multicountry comparison of term-structure forecasts at long horizons', *Journal of Financial Economics*, 29, pp. 59 – 80.

156.Kamara, A. (1997) 'The relation between default-free interest rates and expected economic growth is stronger than you think', *Journal of Finance*, 52, pp. 1681 – 1694.

157.Kandel, S., A. Ofer, O. Sarig (1996) 'Real interest rates and inflation: An ex-ante empirical analysis', *Journal of Finance*, 51, pp. 205 – 225.

158.Kane, E. (1983) 'Nested tests of alternative term structure theories', *Review of Economics and Statistics*, 65, pp. 115 – 123.

159.Karfakis, C., D. Moschos (1995) 'The information content of the yield curve in Australia', *Journal of Macroeconomics*, 17, pp. 93 – 109.

160.Kazemi, H., D. Warotamasikkhadit, V. A. Nageswaran (1997) 'International convergence of short-term and long-term interest rates: Theory and empirical tests', *Global Finance Journal*, 8, pp. 239 - 256.

161.Kessel, R. (1965) *The cyclical behavior of the term structure of interest rates*. NY: NBER.

162.Keynes, J. (1930) *Treatise on Money*. NY: Macmillan.

163.Keynes, J. (1936) *The general theory of employment, interest and money*. London: Macmillan & Co. Ltd.

164.Kim, K., P. Limpaphayom (1997) 'The effect of economic regimes on the relation between term structure and real activity in Japan', *Journal of Economics and Business*, 49, pp. 379 - 392.

165.Kraus, A., M. Smith (1993) 'A simple multifactor term structure model', *Journal of Fixed Income*, 3, pp. 19 – 23.

166.Labadie, P. (1994) 'The term structure of interest rates over the business cycle', *Journal of Economic Dynamics & Control*, 18, pp. 671 – 697.

167.Lee, Bong-So (1989) 'A nonlinear expectations model of the term structure of interest rates with time-varying risk premia', *Journal of Money, Credit, and Banking*, 23, pp. 348 – 367.

168.Lee, Bong-So (1991) 'Government deficits and the term structure of interest rates', *Journal of Monetary Economics*, 27, pp. 425 – 443.

169.Lee, Jeung-Lak, C. Clark, S. Ahn (1998) 'Long- and short-run Fisher effects: New tests and new results', *Applied Economics*, 30, pp. 113 – 124.

170.Leiderman, L., M. Blejer (1987) 'The term structure of interest rates during a financial reform: Argentina 1977 – 1981', *Journal of Development Economics*, 25, pp. 285 – 299.

171.LeRoy, S. (1982) 'Expectations models of asset prices: A survey of theory', *Journal of Finance*, 37, pp. 185 – 217.

172.Longstaff, F. (1989) 'A nonlinear general equilibrium model of the term structure of interest rates', *Journal of Financial Economics*, 23, pp. 195 – 224.

173.Longstaff, F. (1990) 'Time-varying term premia and traditional hypothesis about the term structure', *Journal of Finance*, 45, pp. 1307 – 1314.

174.Longstaff, F. (1992) 'Multiple equilibria and term structure models', *Journal of Financial Economics*, 32, pp. 333 – 344.

175.Longstaff, F., E. Schwartz (1992a) 'Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model', *Journal of Finance*, 47, pp. 1259 – 1282.

176.Longstaff, F., E. Schwartz (1992b) 'A two-factor interest rate model and contingent claims valuation', *Journal of Fixed Income*, 2, pp. 16 – 23.

177.Lucas, R. (1972) 'Expectations and the neytrality of money', *Journal of Economic Theory*, 4, pp. 103 – 124.

178.Lutz, F. (1940) 'The structure of interest rates', *Quarterly Journal of Economics*, 55, pp. 36 – 63.

179.Lyer, S. (1997) 'Time-varying term premia and the behavior of forward interest rate prediction errors', *Journal of Financial Research*, 20, pp. 503 - 507.

180.Lynch, G., B. Ewing (1998) 'Money growth variability and the yield spread in Japan', *American Business Review*, 16, pp. 61 - 67.

181.Macauley, F. (1938) *Some theoretical problems suggested by the movements of interest rates, bond yields, and stock prices in the United States since 1856*. NY: NBER.

182.MacDonald, R., A. Speight (1988) 'The term structure of interest rates in the UK', *Bulletin of Economic Research*, 40, pp. 287 – 299.

183.Malkiel, B. (1966) *The term structure of interest rates: Expectations and behavior patterns*. Princeton: Princeton University Press.

184. Mandeno, R., D. Giles (1995) 'The expectations theory of the term structure: A cointegration / causality analysis of US interest rates', *Applied Financial Economics*, 5, pp. 273 – 283.

185. Mankiw, N. G. (1986) 'The term structure of interest rates revisited', *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, pp. 223 – 242.

186. Mankiw, N. G., J. Miron (1986) 'The changing behavior of the term structure of interest rates', *Quarterly Journal of Economics*, 101, pp. 211 – 228.

187. Mankiw, N. G., L. Summers (1984) 'Do long-term interest rates overreact to short-term interest rates?', *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, pp. 223 – 247.

188. Margaritis, D. (1994) 'Time-varying risk premia in the term structure of interest rates in New Zealand', *Applied Financial Economics*, 4, pp. 111 – 120.

189. Marsh, T. (1995) 'Term structure of interest rates and the pricing of fixed income claims and bonds' in *Handbooks in Operational Research & Mathematical Science*, ed. by R. Jarrow et al. North-Holland, pp. 273 - 314.

190. Marsh, T., E. Rosenfeld (1983) 'Stochastic processes for interest rates and equilibrium bond prices', *Journal of Finance*, 38, pp. 635 – 647.

191. Mascaro, A., A. Meltzer (1983) 'Long- and short-term interest rates in a risky world', *Journal of Monetary Economics*, 12, pp. 485 – 518.

192. Mayfield, E. S., R. Murphy (1996) 'Explaining the term structure of interest rates: A panel data approach', *Journal of Economics and Business*, 48, pp. 11 – 21.

193.McCafferty, S. (1986) 'Aggregate demand and interest rates: a macroeconomic approach to the term structure', *Economic Inquiry*, 24, pp. 521 – 533.

194.McCallum, B. (1994) 'Monetary policy and the term structure of interest rates', *NBER Working paper*, 4938.

195.McFadyen, J., K. Pickerill, M. Devaney (1991) 'The expectations hypothesis of the term structure: More evidence', *Journal of Economics and Business (Temple University)*, 43, pp. 79 – 85.

196.Meiselman, D. (1962) *The term structure of interest rates*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.

197.Merton, R. (1973) 'Rational theory of option pricing', *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, pp. 141 – 183.

198.Miller, V. (1997a) 'Political instability and debt maturity', *Economic Inquiry*, 35, pp. 12 – 27.

199.Miller, V. (1997b) 'Inflation uncertainty and optimal debt maturity: An empirical look at Canadian and U.S government bonds', *Canadian Journal of Administrative Sciences*, 14, pp. 246 - 258.

200.Mills, T. (1991) 'The term structure of UK interest rates: Tests of the expectations hypothesis', *Applied Economics*, 23, pp. 599 – 606.

201.Mishkin, F. (1978) 'Efficient markets theory: Implications for monetary policy', *Brookings Papers on Economic Activity*, 2, pp. 707 – 752.

202.Mishkin, F. (1980) 'Is the preferred habitat model of the term structure inconsistent with financial market efficiency?', *Journal of Political Economy*, 88, pp. 406 – 411.

203.Mishkin, F. (1981) 'Are market forecasts rational?', *American Economic Review*, 71, pp. 295 – 306.

204.Mishkin, F. (1990) 'What does the term structure tell us about future inflation?', *Journal of Monetary Economics*, 25, pp. 77 – 95.

205.Mishkin, F. (1993) *Money, Interest Rates and Inflation*. Edward Elgar.

206.Mishkin, F. (1997) *The Economics of Money, Banking and Financial Markets*. 5th ed. Addison-Wesley.

207.Modigliani, F., R. Shiller (1973) 'Inflation, rational expectations and the term structure of interest rates', *Economica*, 40, pp. 12 – 23.

208.Modigliani, F., R. Sutch (1966) 'Innovations in interest rate policy', *American Economic Review*, 56, pp. 178 – 197.

209.Mougoue, M. (1992) 'The term structure of interest rates as a cointegrated system: Empirical evidence from the eurocurrency market', *Journal of Financial Research*, 15, pp. 285 – 396.

210.Murphy, R. (1986) 'The expectations theory of the term structure: Evidence from inflation forecasts', *Journal of Macroeconomics*, 8, pp. 423 – 434.

211.Muth, J. (1961) 'Rational expectations and the theory of price movements', *Econometrica*, 39, pp. 315 – 334.

212.Neftci, S. N. (1996) *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press.

213.Nelson, C. (1970) 'A critique of some recent empirical research in the explanation of the term structure of interest rates', *Journal of Political Economy*, 78, pp. 764 – 767.

214.Nelson, C. (1972) *The term structure of interest rates*. NY: Basic Books.

215.Nelson, C., A. Siegel (1987) 'Parsimonious modeling of yield curve', *Journal of Business*, 60, pp. 473 – 489.

216.Oldfield, G., R. Rogalski (1987) 'The stochastic propeties of the term structure movements', *Journal of Monetary Economics*, 19, pp. 229 – 254.

217.Overbeck, L., T. Ryden (1997) 'Estimation in the Cox-Ingersoll-Ross model', *Econometric Theory*, 13, pp. 430 – 461.

218.Park, T., L. Switzer (1996) 'Mean reversion of interest-rate term premiums and profits from trading strategies with treasury futures spreads', *Journal of Futures Markets*, 16, pp. 331 – 352.

219.Park, T., L. Switzer (1997) 'Forecasting interest rates and yield spreads: The informational content of implied futures yields and best-fitting forward rate models', *Journal of Forecasting*, 16, pp. 209 – 224.

220.Pearson, N., Tong-Sheng Sun (1994) 'Exploiting the conditional density in estimating the term structure: An application to the Cox, Ingersoll, and Ross model', *Journal of Finance*, 49, pp. 1279 – 1304.

221.Pelsser, A. (1996) 'Efficient methods for valuing and managing interest rate and other derivative securities', *PhD. thesis* (Erasmus University of Rotterdam)

222.Pesando, J. (1981) 'On forecasting interest rates: An efficient market perspective', *Journal of Monetary Economics*, 8, pp. 305 – 318.

223.Pesando, J. (1983) 'On expectations, term premiums and the volatility of long-term interest rates', *Journal of Monetary Economics*, 12, pp. 467 – 474.

224.Phillips, L., J. Pippenger (1976) 'Prefferred habitat vs. efficient market: A test of alternative hypothesis', *Federal Reserve Bank of St. Louis Review*, 58, pp. 151 – 164.

225.Phillips, L., J. Pippenger (1979) 'The term structure of interest rates in the MPS model: Reality or illusion?', *Journal of Money, Credit, and Banking*, 11, pp. 151 – 164.

226.Plosser, C. (1982) 'Government financing decisions and asset returns', *Journal of Monetary Economics*, 9, pp. 325 – 352.

227.Plosser C. (1987) 'Fiscal policy and the term structure', *Journal of Monetary Economics*, 20, pp. 343 – 367.

228.Plosser, C., K. G. Rouwenhorst (1994) 'International term structure and real economic growth', *Journal of Monetary Economics*, 33, p. 133 – 155.

229.Raj, M., A. B. Sim, D. Thurston (1997) 'A generalized method of moments comparison of the Cox-Ingersoll-Ross and Heath-Jarrow-Morton models', *Journal of Economics and Business*, 49, pp. 169 – 192.

230.Richard, S. (1978) 'An arbitrage model of the term structure of interest rates', *Journal of Financial Economics*, 6, pp. 33 – 57.

231.Roll, R. (1970) *The behavior of interest rates*. NY: Basic Books.

232.Roma, A., W. Torous (1997) 'The cyclical behavior of interest rates', *Journal of Finance*, 52, pp. 1519 - 1542.

233.Romer, D. (1996) *Advanced Macroeconomics*. McGraw-Hill, Inc.

234.Rose, A. (1988) 'Is the real interest rate stable?', *Journal of Finance*, 43, pp. 1095 – 1112.

235.Salyer, K. (1990) 'The term structure and time series properties of nominal interest rates: Implications from theory', *Journal of Money, Credit, and Banking*, 22, pp. 478 – 490.

236.Sargent, T. (1987) *Dynamic Macroeconomic Theory*. Harvard University Press.

237.Sargent, T., N. Wallace (1975) "Rational expectations', the optimal monetary instrument, and the optimal money supply rule', *Journal of Political Economy*, 83, pp. 241 – 254.

238.Schaefer, S., E. Schwartz (1984) 'A two-factor model of the term structure: an approximate analytical solution', *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, pp. 413 – 424.

239.Shen, Pu, R. Starr (1998) 'Liquidity of the Treasury bill market and the term structure of interest rates, *Journal of Economics and Business*, 50, pp. 401 - 417.

240.Shiller, R. (1978) 'Rational expectations and the dynamic structure of macroeconomic models: A critical review', *Journal of Monetary Economics*, 4, pp. 1 – 44.

241.Shiller, R. (1979) 'The volatility of long-term interest rates and expectations models of the term structure', *Journal of Political Economy*, 87, pp. 1190 – 1219.

242.Shiller, R. (1981) 'Alternative tests of rational expectations models: The case of the term structure', *Journal of Econometrics*, 16, pp. 71 – 87.

243.Shiller, R. (1986) 'Comments and discussion', *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, pp. 100 – 107.

244.Shiller, R. (1990) 'The term structure of interest rates' in *Handbook of Monetary Economics*, ed. by B. Friedman, F. Hahn. North-Holland, pp. 627 – 722.

245. Shiller, R., J. Campbell, K. Schoenholtz (1983) 'Forward rates and future policy: Interpreting the term structure of interest rates', *Brookings Papers on Economic Activity*, 1, pp. 173 – 217.

246. Schoenbucher, P. (1997) 'Term structure modeling of defaultable bonds', *LSE Discussion paper*, 272.

247. Sill, K. (1996) 'The cyclical volatility of interest rates', *Business Review (Federal Reserve Bank of Philadelphia)*, pp. 15 – 29.

248. Singleton, K. (1980) 'Expectations models of the term structure and implied variance bounds', *Journal of Political Economy*, 88, pp. 1159 – 1176.

249. Sola, M., J. Driffill (1994) 'Testing the term structure of interest rates using a stationary vector autoregression with regime switching', *Journal of Economic Dynamics & Control*, 18, pp. 601 – 328.

250. Stambaugh, R. (1988) 'The information in forward rates', *Journal of Finnacial Economics*, 21, pp. 41 – 70.

251. Stanton, R. (1997) 'A nonparametric model of term structure dynamics and the market price of interest rate risk', *Journal of Finance*, 52, pp. 1973 - 2002.

252. Steeley, J. (1997) 'A two-factor model of the U.K. yield curve', *Manchester School of Economics and Social Studies*, 65, pp. 32 - 58.

253. Stiglitz, J. (1970) 'A consumption-oriented theory of the demand for financial assets and the term structure of interest rates', *Review of Economic Studies*, 10, pp. 321 – 351.

254. Svensson, L. (1991) 'The term structure of interest rate differentials in a target zone', *Journal of Monetary Economics*, 28, pp. 87 – 116.

255.Svensson, L. (1994) 'Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992 – 1994', *IIES Seminar paper*, 579.

256.Taylor, M. (1992) 'Modelling the yield curve', *Economic Journal*, 102, pp. 524 – 532.

257.Thomas, L., A. Abderrezak (1988) 'Anticipated future budget deficits and the term structure of interest rates', *Southern Economic Journal*, 55, pp. 150 – 161.

258.Tice, J., N. Webber (1997) 'A nonlinear model of the term structure of interest rates', *Mathematical Finance*, 7, pp. 177 - 209.

259.Tobin, J. (1978) 'Monetary policies and the economy: the transmission mechanism', *Southern Economic Journal*, 44, pp. 421 – 431.

260.Turnovsky, S. (1989) 'The term structure of interest rates and the effects of macroeconomic policy', *Journal of Money, Credit and Banking*, 21, pp. 321 – 347.

261.Turnovsky, S. (1995) *Methods of Macroeconomic Dynamics*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

262.Turnovsly, S., M. Miller (1984) 'The effects of government expenditure on the term structure of interest rates', *Journal of Money, Credit and Banking*, 16, pp. 16 – 33.

263.Tzavalis, E., M. Wickens (1997) 'Explaining the failures of the term spread models of the rational expectations hypothesis of the term structure', *Journal of Money, Credit and Banking*, 29, pp. 364 - 380.

264.Vasicek, O. (1977) 'An equilibrium characterization of the term structure', *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177 – 188.

265. Vetzal, K. (1997) 'Stochastic volatility, movements in short term interest rates, and bond option value', *Journal of Banking and Finance*, 21, pp. 169 - 196.

266. Wallace, M., J. Warner (1993) 'The Fisher effect and the term structure of interest rates: Tests of cointegration', *Review of Economics and Statistics*, 75, pp. 320 – 324.

267. Walsh, C. (1998) *Monetary Theory and Policy*. Cambridge, Mass.: MIT Press.

268. Wang, J. (1996) 'The term structure of interest rates in a pure exchange economy with heterogeneous investors', *Journal of Financial Economics*, 41, pp. 75 – 110.

269. Wei, D., D. Guo (1997) 'Pricing risky debt: An empirical comparison of the Longstaff and Schwartz and Merton models', *Journal of Fixed Income*, 7, pp. 8 - 28.

270. Williams, J. (1938) *The theory of investment value.* Cambridge, Mass.: Harvard Univercity Press.

271. Woodward, S. (1983). 'The liquidity premium and the solidity premium', *American Economic Review*, 73, pp. 348 – 361.

272. Wu, S., Yang-Cheng Lu, Chin-Shen Lee (1994) 'A cointegration test on stock and bond spread reversion: evidence in Taiwan', *Hong Kong Economic Papers*, 24, 1994.

273. Zhang, H. (1993) 'Treasury yield curves and cointegration', *Applied Economics*, 25. pp. 361 – 367.