ТЕСТИРОВАНИЕ НАЛИЧИЯ ЕДИНИЧНЫХ КОРНЕЙ В ПАНЕЛЬНЫХ ДАННЫХ ПРИ ОДНОРОДНОЙ АЛЬТЕРНАТИВЕ

А.Скроботов, н.с., РАНХиГС

1. Введение

В данной работе рассмотрены процедуры тестирования наличия единичного корня в данных при однородной альтернативе. Тестирование наличия единичного корня в панельных данных предназначено для увеличения мощности по сравнению с одномерными тестами на единичный корень. Гипотеза единичного корня для каждого временного ряда в панели может не отвергаться, но при объединении в панель гипотеза о том, что все временные ряды имеют единичный корень, может быть отвергнута в пользу альтернативы о том, что существует ненулевая доля стационарных временных рядов. Кроме этого, тестирование на панельный единичный корень может являться предварительным этапом для исследования коинтеграции в панелях. Последнее необходимо для исключения возможности наличия ложной регрессии, которая выражена даже сильнее, чем в случае одномерных временных рядов.

В работе мы акцентируем внимание на тестах на единичный корень в панелях против однородной альтернативы, поскольку такие тесты являются более мощными, чем тесты, построенные против неоднородной альтернативы, даже если в действительности альтернатива неоднородная (см. Westerlund and Breitung, 2013, Fact 2). Отметим, что мы не рассматриваем методы учета пространственной корреляции в панелях. Заинтересованный читатель может обратиться к обзору (Breitung and Pesaran, 2008).

2. Модель

Пусть временные ряды $\{y_{i0}, \dots, y_{iT}\}$ для кросс секционных субъектов $i = 1,2, \dots, N$ порождаются для каждого i простой авторегрессией первого порядка

$$y_{it} = \rho_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, y_{it} = \rho_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \tag{1}$$

где начальное значение y_{i0} является фиксированной константой, ошибки ε_{it} являются независимыми и одинаково распределенными (i.i.d.) по всем i и t с $E(\varepsilon_{it}) = 0$, $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_i^2 < \infty$ $E(\varepsilon_{it}^2) = \sigma_i^2 < \infty$ и $E(\varepsilon_{it}^4) < \infty$. Аналогично регрессии Дики-Фуллера, перепишем процесс как

$$\Delta y_{it} = \phi_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \tag{2}$$

где $\Delta y_{it} = y_{it} - y_{i,t-1}$, $\phi_i = \rho_i - 1$. Нас интересует тестирование нулевой гипотезы

$$H_0: \phi_1 = \cdots \phi_N = 0, \tag{3}$$

т.е. гипотезы о том, что все временные ряды имеют единичный корень (являются независимыми случайными блужданиями), против *однородной альтернативы* (homogeneous alternative), H_1:

$$H_1: \phi_1 = \cdots = \phi_N \equiv \phi < 0, \tag{4}$$

Другими словами, при альтенативе авторегрессионный параметр одинаковый для всех кросс-секционных субъектов. Данная альтенатива была рассмотрена в (Levin, Lin and Chu, 2002) (далее LLC). Тест LLC основан на t-статистике для ϕ в регрессии пула

$$\Delta y_{it} = \phi y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}$$

или, используя матричные обозначения,

$$\Delta \mathbf{y}_i = \phi \mathbf{y}_{i,-1} + \varepsilon_i,$$

где $\Delta \mathbf{y}_i = [\Delta y_{i1}, \dots, \Delta y_{iT}]'$, $\mathbf{y}_{i,-1} = [y_{i0}, y_{i1}, \dots, y_{i,T-1}]'$ и $\varepsilon_i = [\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iT}]'$.

На первом шаге оценивается σ_i^2 для каждого панельного временного ряда:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\Delta \mathbf{y'}_i \mathbf{M}_i \Delta \mathbf{y}_i}{T-2},$$

где $\mathbf{M}_i = \mathbf{I}_T - \mathbf{X}_i(\mathbf{X'}_i\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X'}_i$ и $\mathbf{X}_i = (\mathbf{y}_{i,-1})$. Тогда t-статистика для проверки гипотезы (3) принимает вид:

$$\tau_\phi = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{y'}_i \mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{y'}_{i,-1}\mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2}}. \qquad (5)$$

Как отмечается в (Breitung, 2000), в LLC предлагается дополнительно делить эту статистику на $\hat{\sigma}_{NT}$, общее (по всем N и T) стандартное отклонение остатков, но эти остатки уже скорректированы на свои стандартные отклонения, поэтому это стандартное отклонение можно опустить.

2.1. Асимптотика тестов на единичный корень в панельных данных

Рассмотрим получение предельного распределения для статистики LLC. Используя FCLT и CMT, можно показать, что при $T \to \infty$

$$\tau_\phi = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{y'}_i \mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{y'}_{i,-1}\mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2}} \Rightarrow_{T\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 W_i(r) dW_i(r)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \int_0^1 W_i(r)^2 dr}} \equiv \zeta, \qquad (6)$$

где $W_i(r)$, $i = 1, \dots, N$ – независимые Винеровские процессы. Применяя закон больших чисел, числитель (6) (деленный на N) сходится по вероятности к нулю, а знаменатель (деленный на N) сходится к $\frac{1}{2}$. Поэтому t-статистика на основе регрессии пула (по центральной предельной теореме) имеет стандартное нормальное распределение. Отметим, что асимптотическая нормальность также имеет место, когда $T, N \to \infty$ одновременно, а не последовательно, сначала при $T \to \infty$, а затем при $N \to \infty$ (см. Phillips and Moon, 1999).

Для состоятельности тестовых статистик здесь предполагается, что доля стационарных временных рядов в панели сходится к фиксированной константе, т.е. $N_0/N \to \kappa$ при $N \to \infty$. Отвержение нулевой гипотезы в пользу *однородной* альтернативы (т.е. когда все временные ряды в панели являются стационарными) не обязательно говорит о том, что наличие единичного корня отвергается для всех i, а только о том, что гипотеза отвергается для доли $N_0 < N$, и тест не дает каких-либо рекомендаций о величине этой доли или о тех элементах панели, для которых гипотеза отвергается.

2.2. Наличие детерминированной компоненты

Рассмотрим более общий случай с наличием детерминированной компоненты. Рассмотрим два стандартных случая,

$$\Delta y_{it} = \mu_i + \phi_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \text{ Модель 1} \qquad (7)$$

$$\Delta y_{it} = \mu_i + \beta_i t + \phi_i y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}, \text{ Модель 2} \qquad (8)$$

где уравнение (7) соответствует случаю индивидуально-специфических констант (фиксированных эффектов), а (8) соответствует случаю индивидуально-специфических трендов (“случайных трендов”, incidental trends в терминологии (Moon and Phillips, 1999).

Для простоты рассмотрим Случай 1 с фиксированными эффектами. Тест LLC основан на t-статистике для ϕ в регрессии с фиксированными эффектами

$$\Delta y_{it} = \alpha_i + \phi y_{i,t-1} + \varepsilon_{it}$$

или, используя матричные обозначения,

$$\Delta \mathbf{y}_i = \mathbf{1}\alpha_i + \phi \mathbf{y}_{i,-1} + \varepsilon_i,$$

где $\Delta \mathbf{y}_i = [\Delta y_{i1}, \dots, \Delta y_{iT}]'$, $\mathbf{y}_{i,-1} = [y_{i0}, y_{i1}, \dots, y_{i,T-1}]'$, $\varepsilon_i = [\varepsilon_{i1}, \dots, \varepsilon_{iT}]'$ и $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]'$.

На первом шаге оценивается σ_i^2 для каждого временного ряда:

$$\hat{\sigma}_i^2 = \frac{\Delta \mathbf{y}'_i \mathbf{M}_i \Delta \mathbf{y}_i}{T-2},$$

где $\mathbf{M}_i = \mathbf{I}_T - \mathbf{X}_i(\mathbf{X}'_i\mathbf{X}_i)^{-1}\mathbf{X}'_i$ и $\mathbf{X}_i = (\mathbf{1}, \mathbf{y}_{i,-1})$. Тогда t-статистика для проверки гипотезы (3) принимает вид:

$$\tau_\phi = \frac{\sum_{i=1}^{N} \Delta \mathbf{y}'_i \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{y}'_{i,-1} \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2}}, \tag{9}$$

где $\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}_T - \mathbf{1}(\mathbf{1}'\mathbf{1})^{-1}\mathbf{1}'$.

Оценивание коэффициента ϕ эквивалентно оцениванию коэффициента ϕ в центрированной регрессии

$$\Delta \tilde{y}_{it} = \phi \tilde{y}_{i,t-1} + e_{it},$$

где $\tilde{y}_{it} = y_{it} - T^{-1}\sum_{j=0}^{T} y_{i,j}$. При нулевой гипотезе мы получим

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} e_{it}\tilde{y}_{i,t-1} = -\sigma_i^2/2,$$

и

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \tilde{y}_{i,t-1}\tilde{y}'_{i,t-1} = \sigma_i^2/6,$$

так что $\sqrt{N}T(\hat{\phi}-1) + 3\sqrt{N} \Rightarrow N(0{,}51/5)$, то есть $T(\hat{\phi}-1) \xrightarrow{p} -3$. Следовательно, оценка $\hat{\phi}$ является асимптотически смещенной, и t-статистика для проверки $\phi = 0$ расходится к $-\infty$ при росте T и N (из-за коррелированности регрессора и ошибки). Это смещение называется смещением Никелла (Nickell bias), см. (Nickell, 1981).

Можно показать, что скорректированная на смещение статистика

$$Z_{LLC} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\Delta \mathbf{y}'_i \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2 + \frac{1}{2}T)}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{y}'_{i,-1}\mathbf{M}_1\mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2}} = \frac{\tau_\phi}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \frac{-\frac{1}{2}TN}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{y}'_{i,-1}\mathbf{M}_1\mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2}} \tag{10}$$

будет иметь стандартное нормальное предельное распределение. Отметим, что при $\mu_i = 0$ статистика Z_{LLC} совпадает с τ_ϕ. Также следует заметить, что скорость сходимости для оценки $\hat{\phi}$ будет равна $T\sqrt{N}$ (то есть $T\sqrt{N}(\hat{\phi}-1) = O_p(1)$), т.е. сходимость происходит быстрее при $T \to \infty$ (суперсостоятельность), чем при $N \to \infty$. Также из скорости сходимости следует более высокая мощность панельных тестов, поскольку она увеличивается не только с ростом T, но и с ростом N.

Альтернативный способ исключить смещение при оценивании был рассмотрен в (Breitung and Meyer, 1994). Авторы в качестве оценки константы использовали начальное значение y_{i0}, так что регрессионная модель для Случая 1 (против однородной альтернативы H_1) принимает вид

$$\Delta y_{it} = \phi(y_{i,t-1} - y_{i0}) + \varepsilon_{it}. \tag{11}$$

При нулевой гипотезе величина $E[(y_{i,t-1} - y_{i0})\varepsilon_{it}] = 0$, так что t-статистика для ϕ в регрессии (11) не будет смещенной и будет иметь асимптотическое стандартное нормальное распределение. Полученный тест, являющийся t-статистикой в регрессии для преобразованных рядов, мы называем UB_{NT}.

В случае наличия линейного тренда, чтобы получить несмещенную тестовую статистику, имеющую стандартное нормальное распределение, в (Breitung, 2000) было предложено рассмотреть следующую регрессию:

$$\Delta y_{it}^{*} = \phi y_{i,t-1}^{*} + \varepsilon_{it}^{*}, \tag{12}$$

где

$$\Delta y_{it}^{*} = s_t \left[\Delta y_{it} - \frac{1}{T-t}(\Delta y_{it} + \cdots + \Delta y_{iT})\right],$$
$$s_t^2 = (T-t)/(T-t+1),$$
$$y_{i,t-1}^{*} = y_{i,t-1} - y_{i0} - \frac{t-1}{T}(y_{iT} - y_{i0}).$$

Это преобразование называется преобразованием Гельмерта (Helmert transformation). В данном преобразовании вычитание y_{i0} удаляет константу, а $(y_{iT} - y_{i0})/T = (\Delta y_{i0} + \cdots + \Delta y_{iT})/T$ является оценкой коэффициента при тренде. Смещения не возникает из-за ортогональности преобразованных регрессора и ошибки.

В (Westerlund, 2015) вместо обычного детрендирования рассматривались свойства рекурсивного детрендирования, допуская возможно нелинейную трендовую функцию (например, полиномиальный тренд). Кроме полиномиального тренда допускается также более сложная структура, такая как, например, гладкий сдвиг в уровнях на основе логистической функции или множественные сдвиги в трендах (см. Westerlund, 2014a). Более ранние работы, такие как (Shin et al., 2004) и (Sul, 2009), а также многие другие, акцентирующие внимание на различных подходах, изучали эффект рекурсивного детрендирования только на основе симуляций, в то время как в (Westerlund, 2015) более аккуратно анализируются асимптотические свойства рекурсивного детрендирования. Причина преимущества рекурсивного детрендирования, например, для обычных временных рядов, заключается в том, что обычное (по всей выборке) детрендирование нарушает мартингальное свойство данных, а рекурсивное его сохраняет, что приводит к менее смещенной оценке наибольшего авторегрессионного корня. Рекурсивное детрендирование можно проводить как для рядов в уровнях, так и в разностях (последнее приводит к большей мощности). Более конкретно статистику $t - REC$ можно записать следующим образом:

$$t - REC = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=p+1}^{T} R_{i,t-1} r_{it}/\hat{\sigma}_{\varepsilon,i}^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=p+1}^{T} R_{i,t-1}^2/\hat{\sigma}_{\varepsilon,i}^2}}, \tag{13}$$

где

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon,i}^2 = \frac{\mathbf{r}_i'\mathbf{r}_i}{T},$$

$$r_{it} = y_{it} - \sum_{k=2}^{t} y_{ik} a_{kt},$$

а

$$a_{kt} = d_k'\left(\sum_{n=1}^{t} d_n d_n'\right)^{-1} d_t$$

$$d_t = G\Delta D_t,$$

где G является $p \times (p+1)$ – selection matrix, состоящая из нулей и единиц, чтобы не учитывать дифференцированную константу, которая становится вектором из нулевых элементов. Здесь $p+1$ является размерностью детерминированной компоненты. Переменная $R_{i,t-1}$ определяется как $R_{i,t-1} = \sum_{n=p+1}^{t} r_{in}$.

Статистика в модели пула на основе рекурсивно детрендированных рядов будет иметь асимптотическое нормальное распределение без дополнительной коррекции числителя на факторы, связанные со средним и дисперсией, как делается в других тестах. Однако, сравнивая локальную мощность с тестами (Breitung, 2000) и тестом t^+ в (Moon and Perron, 2008) в случае наличия трендов, Вестерлунд заключает, что асимптотическая локальная мощность теста, основанного на рекурсивном детрендировании, несколько ниже (хотя на конечных выборках выше, чем t^+). Более точно $t^+ \Rightarrow -0.053\mu_{c,2} + N(0,1)$, $UB_{NT} \Rightarrow 0.068\mu_{c,2} + N(0,1)$ (используются правосторонние критические значения) и $t - REC \Rightarrow -0.052\mu_{c,2} + N(0,1)$ и оптимальный тест $V_{NT} \Rightarrow -0.075\mu_1 + N(0,1)$, так что $0.075 > 0.068 > 0.053 > 0.052$. Напомним, что в случае отсутствия тренда $t^+ \Rightarrow -0.47\mu_{c,1} + N(0,1)$, $t - REC \Rightarrow -0.5\mu_{c,1} + N(0,1)$, а оптимальный тест $V_{NT} \Rightarrow -0.5\mu_{c,1} + N(0,1)$.

В (Westerlund, 2014b) анализируется GLS-детрендирование[1], однако только для случая фиксированных эффектов. Вестерлунд рассматривает два варианта GLS-детрендирования: в первом случае детрендирование производится после взятия первых разностей, а во втором случае – наоборот. В случае отдельного временного ряда порядок не играет роли. Автор заключает, что первый способ приводит не только к смещенной оценке, но и расходящейся, а при коррекции на среднее и дисперсию мощность сильно падает (рассматривались статистики (Moon and Perron, 2008), $t^{\#}$ и t^+). В терминах локальной мощности рассматриваемые статистики также хуже $t^{\#}$ и t^+ и даже не лучше, чем обычные GLS-статистики для каждого временного ряда. С другой стороны, если брать разность после детрендирования, то тест будет несмещенным и более мощным, чем $t^{\#}$ и t^+ при OLS-детрендировании. В качестве объяснения данного феномена см. Remark 6 в (Westerlund, 2014b).

Обозначим соответствующий GLS-оператор как $\bar{D}$, и этот оператор применяется к y_{it} как $\bar{D}y_{it} = X_{it} - wy_{i1} - w(1-\bar{\rho})\sum_{k=2}^{T}\Delta_{\bar{\rho}}y_{ik}$, где $\Delta_{\bar{\rho}}y_{it} = y_{it} - \bar{\rho}y_{i,t-1}$ для $t \geq 2$, а параметр

$$\bar{\rho} = 1 + \frac{\bar{c}}{N^{\bar{\kappa}}T}$$

теперь зависит не только от $\bar{c} \neq 0$, но и от $\bar{\kappa} \geq 0$[2] Пусть (Q)GLS-оценка максимального авторегрессионного корня равна

$$\hat{\phi}_{QGLS} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}\bar{D}y_{i,t-1}\Delta(\bar{D}y_{it})}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}(\bar{D}y_{i,t-1})^2},$$

а соответствующая ей t-статистика равна

$$t_{QGLS} = \delta_{QGLS}\frac{\hat{\phi}_{QGLS}}{\hat{\sigma}_{\varepsilon}/\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}(\bar{D}y_{i,t-1})^2}},$$

где $\delta_{QGLS} = \sqrt{3/4}$. Локальная мощность теста будет равна $\Phi\left(-\frac{\sqrt{3}\mu_{c,1}}{2\sqrt{2}} + z_{\xi}\right)$. Асимптотические результаты не зависят от $\bar{\kappa}$ и $\bar{c}$и остаются теми же самыми, даже когда $\bar{c}_i$, $i = 1, \dots, N$, не равны. Сравнивая с асимптотической огибающей мощности, которая задается как (см. Moon et al., 2007)

$$\Phi\left(\frac{\sqrt{\mu_{c,2}}}{\sqrt{2}} + z_{\xi}\right) \geq \Phi\left(-\frac{\mu_{c,1}}{\sqrt{2}} + z_{\xi}\right)$$

с равенством при $c_1 = \dots = c_N$, тест t_{QGLS} имеет непренебрежимую локальную мощность внутри той же самой сокращающейся окрестности , что и огибающая, но будет ниже, чем огибающая, поскольку $\sqrt{3}/2\sqrt{2} \approx 0.612 < 1/\sqrt{2} \approx 0.707$. Однако t_{QGLS} не лучше, чем статистики P_a и P_b, предложенные в (Bai and Ng, 2010), являющиеся оптимальными, как и статистика $UB_{NT}UB_{NT}$.

Для практической реализации Вестерлунд рекомендует использовать $\bar{\kappa} = 0$ и $\bar{c} = -1$.

Подводя итог данного раздела, оптимальными тестами в случае наличия только фиксированных эффектов являются V_{NT}, UB_{NT}, P_a, P_b и $t - REC$, а тест LLC имеет несколько более низкую мощность. С другой стороны, при наличии трендов оптимальными тестами являются V_{NT}, P_a, P_b, затем идет UB_{NT}, а после статистика t^+.

---

[1] Единственная предшествующая работа, которая исследовала эффект от GLS-детрендирования на основе симуляций, была работа (Lopez, 2009).

[2] Например, в [] выбиралось $\bar{k} = k$, а в [] $-\bar{k} = 0$.

2.3. Наличие слабой зависимости ошибок

Как и в случае временных рядов, логично было бы предположить, что ошибки ε_{it} в (1) могут быть слабо зависимыми. Тогда, аналогично расширенному тесту Дики-Фуллера, можно аппроксимировать краткосрочную динамику добавлением запаздывающих разностей:

$$\Delta y_{it} = d_{it} + \phi_{i1} y_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{p_i} \psi_{i,p_i} \Delta y_{i,t-j} + \varepsilon_{it}, \qquad (14)$$

где d_{it} – некоторая детерминированная компонента.

В случае однородных альтернатив в LLC рекомендуется сначала очистить переменные от краткосрочной динамики, получая остатки e_{it} (v_{it}) от регрессии Δy_{it} (y_{it}) на $\Delta y_{i,t-j}$, $j = 1, \ldots, p_i$, и d_{it}. Затем общий параметр ϕ можно оценить по регрессии пула

$$(e_{it}/\hat{\sigma}_i) = \phi(v_{i,t-1}/\hat{\sigma}_i) + v_{it}, \qquad (15)$$

где $\hat{\sigma}_i^2$ – оцененная дисперсия e_{it}. Однако регрессия на первом шаге не удаляет всю зависимость в ошибках, поскольку

$$\lim_{T\to\infty} E\left[\frac{1}{T-p}\sum_{t=p+1}^{T} e_{it} v_{i,t-1}/\sigma_i^2\right] = \frac{\omega_i}{\sigma_i}\mu_\infty^*,$$

где ω_i^2 – долгосрочная дисперсия e_{it}. В LLC предлагается оценить ω_i^2 непараметрически, используя ряды в первых разностях:

$$\hat{\omega}_i^2 = \frac{1}{T}\left[\sum_{t=1}^{T} \widehat{\Delta y}_{it}^2 + 2\sum_{l=1}^{K}\left(\frac{K+1-l}{K+1}\right)\left(\sum_{t=l+1}^{T} \widehat{\Delta y}_{it}\widehat{\Delta y}_{i,t-l}\right)\right],$$

где $\widehat{\Delta y}_{it} = \Delta y_{it} - T^{-1}\sum_{t=2}^{T} \Delta y_{it}$ – центрированный ряд разности, K – параметр усечения. Тогда статистика LLC в (10) принимает вид

$$Z_{LLC} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(\Delta \mathbf{y'}_i \mathbf{M}_1 \mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2 - \mu_T^* T\hat{\sigma}_i/\hat{\omega}_i)}{\sigma_T^*\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{y'}_{i,-1}\mathbf{M}_1\mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2}} = \frac{\tau_\phi}{\sigma_T^*} - \frac{\mu_T^* T}{\sigma_T^*\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\mathbf{y'}_{i,-1}\mathbf{M}_1\mathbf{y}_{i,-1}/\hat{\sigma}_i^2}} \times \sum_{i=1}^{N}\frac{\hat{\sigma}_i}{\hat{\omega}_i}. \qquad (16)$$

Снова отметим, что в контексте временных рядов данная оценка, основанная на первых разностях, не была бы состоятельной, поскольку при стационарной альтернативе сходится к нулю по вероятности. В панелях, однако, данная оценка улучшает мощность теста, поскольку корректирующая компонента пропадает и статистика стремится к $-\infty$.

Чтобы избежать непараметрического оценивания долгосрочной дисперсии, можно использовать подход (Breitung and Das, 2005). На первом шаге предлагается оценить регрессию Δy_{it} на детерминированную компоненту и лаги $\Delta y_{i,t-1}, \ldots, \Delta y_{i,t-p_i}$. При нулевой гипотезе очищенный от краткосрочной динамики ряд $\hat{\psi}_i y_{it}$ является случайным блужданием с некоррелированными приращениями. Этот подход также можно использовать для модификации несмещенной статистики UB_{NT}, так что асимптотическая стандартная нормальность сохраняется.

В (Westerlund, 2009) указывается недостаток подхода LLC, который связан с тем, что скорость,при которой оценка долгосрочной дисперсии $\hat{\omega}_i$ сходится к нулю при альтернативе, очень низка, если параметр ширины окна не слишком велик. Таким образом, как показано автором на симуляциях, большинство методов для выбора ширины окна не являются адекватными. Все это приводит к сдвигу распределения вправо на конечных выборках, что приводит к потере мощности. В (Westerlund and Blomquist, 2013) предлагается подход, похожий на (Breitung and Das, 2005), который основан на следующей регрессии:

$$\Delta y_{it} = d_t + \phi_i y_{i,t-1}^* + \sum_{j=1}^{p_i} \psi_{i,p_i} \Delta y_{i,t-j} + \varepsilon_{it},$$

где $y_{i,t-1}^* = (\hat{\sigma}_i/\hat{\omega}_i) y_{t,i-1}$, где долгосрочная дисперсия ω_i оценивается параметрически на основе авторегрессионного представления. В этом случае, при использовании скорректированного запаздывания объясняющей переменной $y_{i,t-1}^*$, статистика LLC корректируется аналогично случаю отсутствия краткосрочной динамики.

Отметим, что статистика, основанная на рекурсивном детрендировании, $t-REC$, предложенная в (Westerlund, 2015), не требует коррекции статистики на смещение, и требует простой очистки переменных от серийной корреляции после выполнения рекурсивного детрендирования.

GLS-теста t_{QGLS}, предложенный в (Westerlund, 2014b), хотя и не является смещенным из-за наличия детерминированной компоненты, он будет смещенным из-за серийной корреляции. Пусть

$$\hat{\sigma}_{\varepsilon}^2 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2,\ \hat{\omega}_{\varepsilon}^2 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{\omega}_{\varepsilon i}^2,\ \hat{\lambda}_{\varepsilon} = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{\lambda}_{\varepsilon i},\ \hat{\phi}_{\varepsilon}^4 = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\hat{\omega}_{\varepsilon i}^4,$$

где $\hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2$, $\hat{\omega}_{\varepsilon i}^2$ и $\hat{\lambda}_{\varepsilon i} = (\hat{\omega}_{\varepsilon i}^2 - \hat{\sigma}_{\varepsilon i}^2)/2$ – оценки дисперсии, долгосрочной дисперсии и односторонней долгосрочной дисперсии процесса ε_{it}. Тогда скорректированная статистика будет иметь вид

$$\hat{\phi}_{QGLS}^* = \hat{\phi}_{QGLS} + \frac{NT\hat{\lambda}_{\varepsilon}}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}(\bar{D}y_{i,t-1})^2}, \tag{17}$$

и соответствующая t-статистика задается как

$$t_{QGLS}^* = \delta_{QGLS}^*\frac{\hat{\phi}_{QGLS}}{\hat{\omega}_{\varepsilon}/\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=2}^{T}(\bar{D}y_{i,t-1})^2}}, \tag{18}$$

где $\delta_{QGLS}^* = \sqrt{3\hat{\omega}_{\varepsilon}^4/4\hat{\phi}_{\varepsilon}^4}$.

Литература

Bai, J. and Ng, S. (2010). Panel unit root tests with cross-section dependence: a further investigation. *Econometric Theory*, **26**, 1088–1114.

Breitung, J. and Das, S. (2005). Panel unit root tests under cross-sectional dependence. *Statistica Neerlandica*, **59**, 414–433.

Breitung, J. and Meyer, W. (1994). Testing for Unit Roots in Panel Data: Are Wages on Different Bargaining Levels Cointegrated? *Applied Economics*, **26**, 353–361.

Breitung, J. and Pesaran, M.H. (2008). Unit Roots and Cointegration in Panels *in* L. Mátyás and P. Sevestre (eds.). *The Econometrics of Panel Data: Fundamentals and Recent Developments in Theory and Practice, Third Edition*, Springer Publishers, Ch. 9, 279–322.

Breitung, J. (2000). The Local Power of Some Unit Root Tests for Panel Data *in* B. Baltagi, T. B. Fomby, and R. C. Hill (eds.). *Nonstationary Panels, Panel Cointegration, and Dynamic Panels, Advances in Econometrics*, **15**, JAI Press, Amsterdam, 161–178.

Choi, I. (2001). Unit Root Tests for Panel Data. *Journal of International Money and Finance*, **20**, 249–272.

Levin, A., Lin, C.F., and Chu, C.J. (2002). Unit Root Tests in Panel Data: Asymptotic and Finite-sample Properties. Journal of Econometrics, **108**, 1–24.

Lopez, C. (2009). A Panel Unit Root Test with Good Power in Small Samples. *Econometric Reviews*, **28**, 295–313.

Moon, H.R., Perron, B., and Phillips, P.C.B. (2007). Incidental Trends and the Power of Panel Unit Root Tests. *Journal of Econometrics*, **141**, 416–459.

Moon, H.R. and Perron, B. (2008). Asymptotic local power of pooled *t*-ratio tests for unit roots in panels with fixed effects. *Econometrics Journal*, **11**, 80–104.

Moon, H.R. and Phillips, P.C.B. (1999). Maximum likelihood estimation in panels with incidental trends. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **61**, 771–748.

Nickell, S. (1981). Biases in dynamic models with fixed effects. *Econometrica*, **49**, 1417–1426.

Phillips, P.C.B. and Moon, H.R. (1999). Linear Regression Limit Theory for Nonstationary Panel Data. *Econometrica*, **67**, 1057–1111.

Shin, D. W., Kang, S., and Oh, M.-S. (2004). Recursive mean adjustment for panel unit root tests. *Economics Letters*, **84**, 433–439.

Sul, D. (2009). Panel unit root tests under cross section dependence with recursive mean adjustment. *Economics Letters*, **105**, 123–126.

Westerlund, J. and Blomquist, J. (2013). A Modified LLC Panel Unit Root Test of the PPP Hypothesis. *Empirical Economics*, **44**, 833–860.

Westerlund, J. and Breitung, J. (2013). Lessons From a Decade of IPS and LLC. *Econometric Reviews*, **32**, 547–591.

Westerlund, J. (2009). A note on the use of the LLC panel unit root test. *Empirical Economics*, **37**, 517–531.

Westerlund, J. (2014 *a*). An IV test for a unit root in generally trending and correlated panels. Unpublished Manuskript.

Westerlund, J. (2014 *b*). GLS Demeaning in Panel Unit Root Testing. Unpublished Manuskript.

Westerlund, J. (2015). The effect of recursive detrending on panel unit root tests. *Journal of Econometrics*, **185**, 453–467.