

## **ЧАСТЬ II. Структуры случайных векторов**

### **Глава 6. Прогнозирование с использованием структур случайных векторов**

Во второй части работы рассматривается подход к построению прогнозов временных рядов, основанный на использовании структур случайных векторов. Данный подход, в отличие от традиционного эконометрического подхода, используемого в первой части, не предполагает каких-либо гипотез о конкретном функциональном виде случайной составляющей временного ряда, при этом расчет прогноза производится на основе имеющейся фактической информации о совместном распределении рассматриваемых случайных величин.

Кратко формулируются основные положения теории структур случайных векторов. Ставится задача прогнозирования временных рядов с использованием их лаговой структуры как структуры соответствующих случайных векторов и излагаются алгоритмы построения трендовых и вероятностных моделей и построения прогнозов с их использованием. Представлены результаты расчетов по десяти временным рядам: инфляция, денежные агрегаты  $M0$ ,  $M1$ ,  $M2$ , экспорт, импорт, безработица, налоговые доходы федерального бюджета, доходы федерального бюджета и ВВП. В Заключение приводятся краткие выводы и излагаются пути совершенствования предложенных моделей. В Приложениях приведены макросы (программы) построения моделей и прогнозов на их основе, а также исходные данные для расчетов.

#### **6.1. Предварительные замечания**

##### ***6.1.1. Непосредственные связи между элементами статистической системы***

Для изучения закономерностей механизма, определяющего состояние и поведение многих сложных систем, обычно имеются лишь результаты наблюдений за реализациями состояния и поведения системы. В связи с этим часто бывает целесообразно моделировать изучаемую систему некоторым

случайным вектором, предполагая, что наблюдаемые значения характеристик системы являются его реализациями.

Полное и в то же время достаточно сжатое описание статистической системы (системы, моделируемой случайным вектором) полностью определяется совместной функцией распределения вероятностей компонент индуцируемой ею случайной многомерной величины. Априорные гипотезы, выделяющие класс статистических систем, могут отражать как содержательные свойства систем, входящих в этот класс, так и формальные особенности случайных векторов, моделирующих системы класса.

Количественному исследованию сложной системы обычно предшествует качественный содержательный анализ, позволяющий сформулировать некоторую априорную гипотезу о специфике изучаемой системы. Первым этапом такого анализа является этап идентификации системы. В хорошо идентифицированной системе не должно быть элементов, не зависящих друг от друга, хотя бы через посредство других элементов системы. В противном случае система может быть разбита на независимые подсистемы, которые исследуются по отдельности. В то же время, если все элементы системы взаимосвязаны, то система оказывается недоидентифицирована. В связи с этим возникает важная проблема определения непосредственных и опосредованных связей между элементами системы.

Естественно считать, что элементы сложной системы взаимосвязаны, если изменение состояния одного элемента с необходимостью влечет за собой изменение состояния другого. Однако этому качественному представлению о взаимосвязи можно поставить в соответствие множество различных формальных определений.

На практике часто в качестве характеристики связи между элементами статистической системы используют корреляционную матрицу соответствующего случайного вектора. Наличие или отсутствие корреляции между переменными интерпретируется как наличие или отсутствие связи между ними. На самом деле коррелированность компонент случайного вектора может означать лишь то, что соответствующие элементы статистической системы связаны одновременно с одним или несколькими другими ее элементами.

Если каждому элементу системы поставить в соответствие вершину помеченного графа, ребра которого отвечают наличию непосредственных связей между элементами, отвечающими вершинам, инцидентным этим ребрам, то получится очень наглядное представление непосредственных связей в системе. Этот граф называется *графом непосредственных связей* или *структурой* изучаемой системы.

Пусть, например, рассматривается система  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ , состоящая из пяти элементов. Пусть эта система имеет структуру  $\Gamma$ , изображенную на рис. 6.1.1. В этом случае переменная  $x_1$  непосредственно связана с переменными  $x_2, x_3, x_4$ ;  $x_2$  с переменными  $x_1, x_4$ ;  $x_3$  с переменными  $x_1, x_4$ ;  $x_4$  с переменными  $x_1, x_2, x_3, x_5$ ;  $x_5$  с переменной  $x_4$ . Таким образом, если интерес представляет только поведение второго и пятого элементов системы в зависимости от остальных, то можно вместо одной 5-мерной системы  $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$  рассмотреть две подсистемы  $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$  и  $\{x_4, x_5\}$  меньшей размерности.

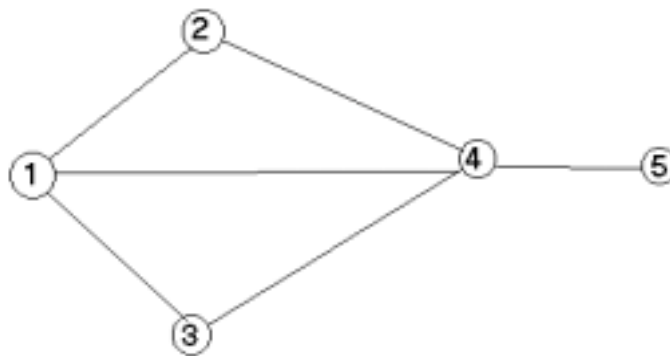


Рис. 6.1.1. Структура системы  $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$

### 6.1.2. Структуры случайных векторов

Структура статистической системы (случайного вектора, моделирующего статистическую систему) – достаточно широкое понятие. Отличаясь высокой наглядностью, структуры очень полезны при качественном анализе сложных статистических систем<sup>3</sup>. Выделяя для каждого элемента системы группу элементов, непосредственно с ним связанных, структуры позволяют существенно упростить и количественный анализ, снижая размерность рассматриваемой в каждый момент системы. В связи с этим возникает актуальная задача – задача построения структуры по статистической информации (обычно весьма ограниченной) о системе. К сожалению, в общем случае

<sup>3</sup> См.: Гаврилец Ю.Н. Социально-экономическое планирование (системы и модели). М.: Экономика, 1974.

построение структуры статистической системы представляет собой весьма трудоемкую работу (вычислительная сложность данной задачи – башня экспонент).

Не будем приводить строгого формального определения структуры случайного вектора, а приведем лишь критерий для проверки того, что заданный граф является структурой данного случайного вектора. Обозначим через  $\Gamma(i)$  множество вершин графа  $\Gamma$ , смежных с вершиной  $i$  (т.е. множество вершин, соединенных ребром с вершиной  $i$ ). Справедливо следующее утверждение<sup>4</sup>.

**Теорема.** Помеченный граф  $\Gamma$  является структурой  $n$ -мерной случайной величины  $\xi$  с совместным распределением вероятностей  $p(x) = p(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда для любых подмножеств  $A$  и  $B$  множества индексов  $I = \{1, \dots, n\}$  таких, что  $\Gamma(A) \subset B \subset I \setminus A$ , выполняется соотношение

$$p(x_A | x_{I \setminus A}) = p(x_A | x_B) = p(x_A | x_{\Gamma(A)})$$

где  $\Gamma(A) = \bigcup_{i \in A} \Gamma(i) \setminus A$ , т.е.  $\Gamma(A)$  – объединение всех индексов связанных с индексами из множества  $A$  и не входящих в него;  $x_A$  – подвектор вектора  $x$  с индексами из  $A$ .

В рассмотренном выше примере (рис. 6.1.1)  $\Gamma(1) = \{2, 3, 4\}$ ;  $\Gamma(2) = \{1, 4\}$ ;  $\Gamma(3) = \{1, 4\}$ ;  $\Gamma(4) = \{1, 2, 3, 5\}$ ;  $\Gamma(5) = \{4\}$ ; а, например,  $\Gamma(1, 2) = \{2, 3, 4\} \cup \{1, 4\} \setminus \{1, 2\} = \{3, 4\}$ .

Для практических расчетов и оценок взаимосвязей между элементами статистических систем использование многомерных распределений вероятностей не конструктивно. В связи с этим целесообразно ввести эквивалентное определение структуры случайного вектора в терминах теории информации<sup>5</sup>. Понятия «энтропия» и «количество информации» представляют собой естественные меры неопределенности и зависимости компонент многомерной случайной величины.

Энтропия дискретной случайной величины  $\xi$  (т.е. случайной величины, принимающей не более, чем счетное число значений), принимаю-

<sup>4</sup> Юдин А.Д. Структуры наборов псевдонезависимых случайных величин // Модели и методы исследования социально-экономических процессов. М.: ЦЭМИ АН СССР, 1976.

<sup>5</sup> См., например: Яглом А.М., Яглом И.М. Вероятность и информация. М.: Наука, 1973.

щей значения  $x \in X$  с вероятностями  $p(x)$ , равна

$$H(\xi) = - \sum_{x \in X} p(x) \log_2 p(x).$$

Количество информации о случайной величине  $\xi_A$ , содержащееся в случайном векторе  $\xi_B$ , определяется как

$$I(\xi_A, \xi_B) = H(\xi_A) + H(\xi_B) - H(\xi_A, \xi_B).$$

При этом энтропия и количество информации измеряются в битах.

В силу свойств количества информации, приведенную теорему можно сформулировать в более конструктивном виде.

**Теорема.** Помеченный граф  $\Gamma$  является структурой  $n$ -мерной случайной величины  $\xi$  с совместным распределением вероятностей  $p(x) = p(x_1, \dots, x_n)$  тогда и только тогда, когда для любых подмножеств  $A$  и  $B$  множества индексов  $I = \{1, \dots, n\}$  таких, что  $\Gamma(A) \subset B \subset I \setminus A$ , выполняется соотношение

$$I(\xi_A, \xi_{I \setminus A}) = I(\xi_A, \xi_B) = I(\xi_A, \xi_{\Gamma(A)}),$$

где

$$\Gamma(A) = \bigcup_{i \in A} \Gamma(i) \setminus A.$$

Знание структуры случайного вектора, индуцированного изучаемой системой, позволяет существенно упростить ее качественный анализ. В частности, по известной структуре можно построить рекурсивную систему<sup>6</sup>, что дает возможность упростить также и количественный анализ исследуемой системы. Однако, как уже указывалось, построение структур случайных векторов в общем случае является весьма трудоемкой задачей.

### 6.1.3. Существенная размерность и информативные структуры

При известной структуре случайного вектора, можно построить большое количество различных рекурсивных систем, определяемых перестановкой индексов компонент исследуемой системы. Для любой перестановки

---

<sup>6</sup> Рекурсивная система-система, в которой переменные можно упорядочить таким образом, чтобы переменная с большим индексом зависела только от переменных с меньшими индексами.

$\{\alpha_i\}_{i=1}^n$  множества индексов  $I = \{1, \dots, n\}$  справедливо

$$p(x) = \prod_{i=1}^n p(x_{\alpha_i} | x_{\Delta(\alpha_i)}),$$

где

$$\Delta(\alpha_i) = \Gamma(\alpha_i) \cap \{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}\}.$$

При этом возникают две задачи:

- определение перестановки индексов, при которой размерность сомножителей композиции, задающей совместное распределение вероятностей случайного вектора, минимальна;
- оценка соответствующих частных распределений вероятностей.

Существенной размерностью  $n$ -мерного случайного вектора с совместным распределением вероятностей  $p(x)$  называется минимальное число  $k$ , для которого существует такая перестановка индексов  $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ , что соответствующая декомпозиция распределения вероятностей  $p(x)$  имеет размерность сомножителей не выше  $k$ .

В силу того, что в практических исследованиях обычно имеется весьма ограниченный статистический материал, с достаточной степенью достоверности можно строить совместные распределения вероятностей лишь очень невысокой размерности. Таким образом, становится актуальной проблема восстановления по имеющимся данным совместного распределения вероятностей случайного вектора невысокой существенной размерности наилучшим образом (в некотором заранее заданном смысле) отражающем имеющуюся информацию.

Ниже в качестве характеристики непосредственных связей статистических систем будут рассматриваться информативные структуры этих систем. Грубо говоря<sup>7</sup>, информативные структуры  $k$ -го порядка — это структуры случайных векторов  $k$ -существенной размерности, ближайших в смысле минимума различающей информации к модели исследуемой статистической системы. Другими словами, информативная структура  $k$ -го порядка  $n$ -мерного случайного вектора — это структура другого  $n$ -мерного случайного вектора, совместное распределение вероятностей которого удовлетворяет следующим свойствам. Оно является, во-первых, композицией  $k$ -мерных

<sup>7</sup> Подробнее о существенной размерности случайных векторов см.: Юдин А.Д. О выделении существенных связей в многомерной случайной величине // Модели социально-экономических процессов и социальное планирование. М.: Наука, 1979.

частных распределений вероятностей исходного случайного вектора, и, во-вторых, ближайшим в смысле минимума различающей информации к неизвестному распределению вероятностей случайного вектора, моделирующего изучаемую статистическую систему. Соответствующее распределение вероятностей называется информативной аппроксимацией  $k$ -го порядка истинного распределения вероятностей. Все  $k$ -мерные маргинальные распределения предполагаются известными или же их можно построить по имеющемуся статистическому материалу с достаточной степенью достоверности и надежности<sup>8</sup>.

#### 6.1.4. Прогнозирование с использованием структур случайных векторов

Обычно при качественном анализе сложной системы всю рассматриваемую систему показателей можно разбить на две принципиально различные группы показателей: зависимые переменные, поведение которых необходимо исследовать, и факторные показатели, определяющих в значительной мере поведение первой группы показателей. В свою очередь, факторные показатели также подразделяются на две подгруппы: управляемые переменные, на которые возможно непосредственное управленческое воздействие, и наблюдаемые характеристики среды, непосредственно воздействовать на которые нельзя.

Знание структуры системы (информативной структуры) позволяет построить рекурсивную систему с известным распределением вероятностей:

$$x_i = f_i(x_{\Delta(i)}) \quad i = 1, \dots, n,$$

где  $\Delta(i)$  – множество индексов, определяемых для каждого показателя выявленными информативными связями. В качестве функций  $f_i(x_{\Delta(i)})$ , в соответствии с которыми осуществляется прогноз, можно взять обычные линейные регрессии или, что, вообще говоря, должно приводить к лучшему результату, условные математические ожидания по полученным при построении информативных структур частным распределениям вероятностей. Линейные регрессии дают наилучший результат в случае, когда индуцируе-

---

<sup>8</sup> Понятие информативной структуры было введено в работе: Юдин А.Д. Об информативных структурах многомерных случайных величин // Известия АН СССР. Техническая кибернетика, 1977, № 6. Подробнее см., например, Юдин Д.Б., Юдин А.Д. Математики измеряют сложность. М.: Знание, 1985 (сер. «Число и мысль» Вып. 8).

мый рассматриваемой системой случайный вектор является нормально распределенным<sup>9</sup>.

При использовании второго подхода для построения прогноза фактически применяется исходное определение регрессии как условного математического ожидания. В этом случае функции прогноза выглядят следующим образом:

$$\tilde{x}_i = f_i(x_{j(i)}, x_{k(i)}) = \sum_{X_i} x_i P\{X_i = x_i | X_{\Delta(i)} = x_{\Delta(i)}\} i = 1, \dots, n,$$

где множество  $X_i$  – множество возможных значений  $i$ -го показателя системы,  $P\{X_i = x_i | X_{\Delta(i)} = x_{\Delta(i)}\}$  – условное распределение вероятностей того, что  $i$ -й показатель примет значение равное  $x_i$  при том, что  $X_{\Delta(i)} = x_{\Delta(i)}$ . Поскольку ниже мы рассматриваем только информативные структуры третьего порядка, то все множества  $\Delta(i)$  содержат по два элемента:  $\Delta(i) = \{j(i), k(i)\}$ .

## 6.2. Постановка проблемы и алгоритмы

### 6.2.1. Постановка проблемы

#### 6.2.1.1. Трендовый прогноз

Будем рассматривать произвольный временной ряд  $x_t$  (в общем случае векторный, размерности  $n$ ) как реализацию суммы двух процессов: детерминированного тренда, отражающего внутренние закономерности исследуемого процесса, и стохастического тренда некоторого случайного процесса, отражающего случайные отклонения от детерминированного тренда, а также неучтенные в детерминированном тренде факторы. Другими словами, будем считать, что

$$x_t = f(t) + \xi(y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p} \dots),$$

где  $f$  – детерминированная функция (в общем случае вектор-функция), зависящая от времени;  $y_t = x_t - f(t)$  – отклонение значения временного ряда в момент времени  $t$  от тренда;  $\xi$  – случайная функция (в общем случае случайная вектор-функция), зависящая от предыстории отклонений временного ряда от тренда.

<sup>9</sup> См.: Заруцкий В.И. О выделении некоторых графов связей для нормальных векторов большой размерности // Алгоритмическое и программное обеспечение прикладного статистического анализа. М.: Наука, 1980.



Для построения функции прогноза значения ряда в момент времени  $t + 1$  по известным значениям ряда  $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-\tau}, \dots$  достаточно знать функцию тренда  $f(t)$  и условное распределение вероятностей  $p(y_{t+1} = y | y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-\tau}, \dots)$ . В этом случае наилучший прогноз представляет собой сумму значения тренда в момент времени  $t + 1$  и условного математического ожидания реализации случайной величины при известных значениях  $x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-\tau}, \dots$ , т.е.

$$\tilde{x}_{t+1} = f(t+1) + \int_{y \in Y} yp(y_{t+1} = y | y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-\tau}, \dots) dy.$$

Таким образом, если известна структура случайного вектора  $\xi$ , то оптимальный прогноз величины  $x_{t+1}$  задается выражением

$$\tilde{x}_{i,t+1} = f(t+1) + \int_{y \in Y_i} yp(y_{i,t+1} = y | y_{\Gamma(t,i)}) dy, i = 1, \dots, n,$$

где  $\Gamma$  – структура случайного вектора  $\xi$ . (Напомним, что структурой случайного вектора называется граф, ребра которого отвечают наличию непосредственных связей между соответствующими компонентами случайного вектора. Таким образом, множество  $\Gamma(t, i)$  – множество переменных с соответствующими лагами, от которых непосредственно зависит переменная  $x_i$ .

В настоящей работе мы рассматриваем только скалярные временные ряды. Поэтому

$$\tilde{x}_{t+1} = f(t+1 | \Gamma(t)) = f(t+1) + \int_{x \in X} xp(x_{t+1} = x | x_{\Gamma(t)}) dx. \quad (6.2.1)$$

Следовательно, для построения функции прогнозирования указанного вида необходимо произвести следующие действия:

1. Определить функциональный вид тренда.
2. Построить тренд.
3. Построить ряд отклонений от тренда.
4. Построить структуру (информативную структуру) лаговых показателей отклонений от тренда.
5. Построить условное распределение вероятностей отклонений от тренда в зависимости от выявленных лаговых отклонений.

Прогноз, построенный с использованием предлагаемого здесь подхода, основанного на выявлении структуры случайных отклонений от детерминированного тренда временного ряда, будем называть для краткости *трендовым прогнозом*.

### 6.2.1.2. Вероятностный прогноз

Рассмотрим еще один подход к построению прогноза, также основанный на выявлении структуры случайного вектора. Однако в этом случае предполагается, что в исходном временном ряде  $x_t$  отсутствует детерминированная составляющая (детерминированный тренд). Для краткости будем называть прогноз, построенный на основе этого подхода, *вероятностным прогнозом*.

Таким образом, в данном случае будем рассматривать произвольный временной ряд  $x_t$  (в общем случае векторный) как реализацию стохастического тренда некоторого случайного процесса, отражающего случайные отклонения от некоторого среднего значения. Другими словами, будем считать, что

$$x_t = \xi(x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_{t-p} \dots),$$

где  $\xi$  случайная функция (в общем случае случайная вектор функция), зависящая от предыстории.

В рассматриваемом случае для построения функции прогноза значения ряда в момент времени  $t+1$  по известным значениям ряда  $x_p, x_{t-1}, \dots, x_{t-p} \dots$  достаточно знать условное распределение вероятностей  $p(x_{t+1} = x | x_p, x_{t-1}, \dots, x_{t-p} \dots)$ . Наилучший прогноз представляет собой в этой ситуации условное математическое ожидание реализации случайной величины  $\zeta$  при известных значениях  $x_p, x_{t-1}, \dots, x_{t-p} \dots$ , т.е.

$$\hat{x}_{t+1} = \int_{x \in X} xp(x_{t+1} = x | x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-p}, \dots) dx.$$

Однако достаточно часто ряд  $x_t$  имеет ярко выраженную тенденцию. В таких ситуациях данные следует детрендить. Будем для этого переходить к темповым характеристикам ряда<sup>10</sup>. Введем новый ряд:

$$y_t = \frac{x_{t+1}}{x_t}, t = 1, \dots, T-1.$$

Будем считать значения ряда  $y_t$  реализациями случайного вектора  $\zeta$ . Таким образом, если известна структура случайного вектора  $\zeta$ , то оптимальный прогноз величины  $y_{t+1}$  задается выражением

$$\tilde{y}_{i,t+1} = \int_{y \in Y_i} yp(y_{i,t+1} = y | y_{\Delta(t,i)}) dy, i = 1, \dots, n,$$

где  $\Delta$  структура случайного вектора  $\zeta$ . Таким образом, прогноз  $x_{t+1}$  определяется соотношением

<sup>10</sup> Такой способ детрендинга эквивалентен детрендингованию ряда логарифмов.

$$\tilde{x}_{i,t+1} = x_t \int_{y \in Y_i} yp(v_{i,t+1} = y | y_{\Delta(t,i)}) dy, i = 1, \dots, n.$$

Поскольку мы рассматриваем только скалярные временные ряды, то

$$\epsilon_{t+1} = \psi(t+1|\Delta(t)) = x_t \int_{y \in Y} yp(v_{t+1} = y | y_{\Delta(t)}) dy. \quad (6.2.2)$$

Следовательно, для построения функции прогнозирования указанного вида необходимо произвести следующие действия:

1. Рассчитать темповые характеристики (если нужно) ряда.
2. Построить структуру (информативную структуру) лаговых показателей темповых характеристик ряда.
3. Построить условное распределение вероятностей темповых характеристик ряда в зависимости от выявленных лаговых характеристик.

#### 6.2.1.3. Использование прогнозирующих функций

Полученная в результате проведенных действий функция прогнозирования  $\varphi(t|\Gamma(t))$  вида (6.2.1) или  $\psi(t|\Delta(t))$  (6.2.2) и является прогнозирующей функцией исходного временного ряда  $x_t$ . Для проверки построенной функции прогнозирования производится имитация исходного временного ряда в соответствии с соотношением

$$\epsilon_{t+1} = \begin{cases} \epsilon_{t+1}^{(1)} = \varphi(t+1|\Gamma(t)) \\ \epsilon_{t+1}^{(2)} = \psi(t+1|\Delta(t)) \end{cases} t = \tau, \dots, T-1,$$

где  $T$  – длина ряда  $x_t$ , использованного для построения функции прогнозирования, а  $\tau$  – максимальный лаг, входящий в множества  $\Gamma$  и  $\Delta$ . Качество имитации будем оценивать величиной средней относительной ошибки, точнее, величиной средней абсолютной процентной ошибки (MAPE – Mean Absolute Percent Error):

$$\delta = \frac{100}{T - \tau + 1} \sum_{t=\tau}^T \frac{|x_t - \epsilon_t|}{x_t}.$$

После проверки качества имитации строятся одношаговые прогнозы развития временного ряда  $x_t$ : три с использованием функции  $\varphi(t|\Gamma(t))$  и два с использованием функции  $\psi(t|\Delta(t))$ . Качество прогнозов оценивается, так же как и качество имитации, величиной средней относительной ошибки (MAPE)

$$\mathcal{E} = \frac{100}{\mathcal{F}} \sum_{t=1}^{\mathcal{F}} \frac{|x_t - \mathcal{E}_t|}{x_t} .$$

Здесь  $\mathcal{F}$  – горизонт прогнозирования.

Рассмотрим пять методов прогнозирования.

1. Трендовый прогноз без обучения. В этом случае и функция тренда  $f(t)$ , и условное распределение вероятностей  $p(y_{t+l} = y | y_{\Gamma(t)})$  случайного вектора  $\xi$  строятся на основе отклонений от тренда исходного временного ряда  $\{y_t\}_{t=1}^T$ . После этого с использованием полученных функций строится последовательность одношаговых прогнозов значений временного ряда  $\{\mathcal{E}_{T+t}\}_{t=1}^{\mathcal{F}}$ , зависящих от истинных значений  $\{x_{T+t}\}_{t=0}^{\mathcal{F}-1}$ .
2. Трендовый прогноз с обучением без коррекции тренда. Этот случай отличается от предыдущего тем, что на каждом шаге построения последовательности одношаговых прогнозов пересчитывается условное распределение вероятностей  $p(y_{t+l} = y | y_{\Gamma(t)})$  случайного вектора  $\xi$  с использованием всех значений ряда отклонений от тренда до момента прогнозирования, т.е.  $\{y_\tau\}_{\tau=1}^t$ .
3. Трендовый прогноз с обучением и коррекцией тренда. В этой ситуации на каждом шаге прогнозирования уточняется не только условное распределение вероятностей, но и функция тренда. Другими словами, данный метод прогнозирования аналогичен «рекуррентному прогнозу», рассмотренному в первой части.
4. Вероятностный прогноз без обучения. В этом случае условное распределение вероятностей  $p(y_{t+l} = y | y_{\Delta(t)})$  случайного вектора  $\zeta$  строится на основе темповых характеристик  $\{y_t\}_{t=1}^{T-1}$  исходного временного ряда  $\{x_t\}_{t=1}^T$ . После этого с использованием полученных функций строится последовательность одношаговых прогнозов значений временного ряда  $\{\mathcal{E}_{T+t}\}_{t=1}^{\mathcal{F}}$  за-

висящих от истинных значений  $\{x_{T+t}\}_{t=0}^{t^*-1}$ .

5. Вероятностный прогноз с обучением. Этот случай отличается от предыдущего тем, что на каждом шаге построения прогноза пересчитывается условное распределение вероятностей  $p(y_{t+1} = y | y_{\Delta(t)})$  случайного вектора  $\zeta$  с использованием всех значений ряда до момента прогнозирования, т.е.

$$\{x_t\}_{t=1}^t.$$

## 6.2.2. Алгоритмы моделирования и прогнозирования

### 6.2.2.1. Построение тренда

Здесь можно рассмотреть два подхода. Первый основан на качественном анализе исходного динамического ряда.

Сначала промежуток времени, на котором задан анализируемый временной ряд, разбивается на интервалы относительно схожего поведения. В данном случае в значительной мере используются результаты работы «Эконометрический анализ динамических рядов основных макроэкономических показателей» (М.: ИЭПП, 2001).

В результате такого анализа определяется функциональный вид тренда анализируемого временного ряда, т.е. определяется функция тренда  $f(t, a)$  с точностью до некоторого векторного параметра  $a$ . В данной работе в большинстве случаев используется кусочно-линейный тренд с изломом, приходящимся на вторую половину (август-сентябрь) 1998 г. На каждом из выделенных временных интервалов решается отвечающая соответствующему функциональному виду тренда система нормальных линейных уравнений, которая и определяет неизвестные параметры функции тренда. Для практической реализации нахождения параметров функции тренда используется построение регрессии по данным  $\{x_t\}_{t=1}^T$  на  $f(t, (1, \dots, 1))$ . Это позволяет получить не только значения векторного параметра  $a$ , но и статистические характеристики как значений параметров, так и самой функции тренда.

Второй подход основан на рассмотрении функции тренда временного ряда в виде некоторого полинома, т.е. приближенного разложения функции тренда в степенной ряд. Задав некоторый порядок полинома  $p$ , можно построить регрессию данных  $\{x_t\}_{t=1}^T$  на значения  $1, t, t^2, \dots, t^p$ . После удаления

статистически незначимых регрессоров получаем полиномиальную функцию тренда.

В данной работе использован только первый подход к построению функции тренда.

#### 6.2.2.2. Выявление лаговой структуры

Для случайных величин  $\xi$  и  $\zeta$  строится условная информативная структура третьего порядка. Другими словами, определяются два лаговых показателя, знание значений которых в совокупности несет наибольшее количество информации о значении исследуемой переменной в текущий момент времени. Поскольку в настоящей работе рассматриваются только одномерные временные ряды, то задача построения информативных структур существенно упрощается.

В этом случае достаточно получить количество информации о значении показателя в момент времени  $t$ , содержащееся в любой паре лаговых показателей. После этого выбирается пара, отвечающая максимальному значению количества информации. Лаги, задаваемые этой парой, являются наиболее информативными с точки зрения определения значения анализируемого показателя в момент времени  $t$ . По определению отношение полученного количества информации к энтропии исследуемого показателя (коэффициент информативности) определяет долю неопределенности этого показателя, снижаемую за счет знания значений соответствующих лаговых показателей.

Рассмотрим схему практической реализации выявления пары наиболее информативных лагов. Соответствующий макрос (Информации3()) приведен в Приложении П1.1.

По определению количество информации  $I(\eta_1, (\eta_2, \eta_3))$  о случайной величине  $\eta_1$ , содержащееся в паре случайных величин  $\eta_2$  и  $\eta_3$ , равно:  $I(\eta_1, (\eta_2, \eta_3)) = H(\eta_1) + H(\eta_2, \eta_3) - H(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ , где  $H(\eta)$  – энтропия случайной величины  $\eta$  с совместным распределением вероятностей  $p(x) = P\{\eta = x\}$ , определяемая как 
$$H(\eta) = - \sum_{x \in X} p(x) \log_2 p(x).$$
 Количество информации и энтропия измеряются в битах.

На первом этапе выявления информативных лагов задается максимально возможное запаздывание (величина  $\tau$ ). В данной работе рассматриваются лаги не превышающие одного года, т.е. для месячных данных  $\tau = 12$ , а для квартальных  $\tau = 4$ . Таким образом, рассматриваются 13- и 5-мерные случайные векторы, для которых определяется наиболее информативная зависимость первой компоненты от пары остальных.

На следующем этапе производится нормировка исходных данных ( $id(1), \dots, id(nn)$ ,  $nn$  – длина ряда по которому строится модель) так, чтобы они изменялись в диапазоне от 0 до 1:

$$idn(i) = \frac{id(i) - \min_{1 \leq j \leq nn} id(j)}{\max_{1 \leq j \leq nn} id(j) - \min_{1 \leq j \leq nn} id(j)}.$$

Кроме того, на этом шаге задается уровень табуляции данных ( $eps$ ). Дело в том, что чем ниже уровень табуляции, тем более точным получается результат, однако, в силу ограниченности данных, одновременно снижается надежность получаемого результата. Поэтому уровень табуляции выбирается таким образом, чтобы в каждую градацию попадало в среднем 4–5 значений ряда, т.е.

$$\frac{4}{nn} \leq eps \leq \frac{5}{nn}.$$

На третьем этапе рассчитываются приближенные значения вероятностей (частоты) того, что соответствующие случайные величины принимают значения из каждой из градаций. Для этого определяются центры градаций каждого из табулированных распределений вероятностей

$$\left( \frac{(k-1) \times eps}{2}, k = 1, \dots, n_i \right), \text{ где } n_i = \left\lceil \frac{\sqrt{i}}{eps} \right\rceil, i = 1, 2, 3 - \text{минимальное}$$

целое число не меньшее  $\frac{\sqrt{i}}{eps}$ ) и рассчитываются расстояния в одно- двух-

и трехмерном пространствах от данных за каждую единицу времени до соответствующих центров. После этого подсчитывается количество попавших в каждую градацию элементов для анализируемого показателя  $N_0(k)$ ,  $k = 1, \dots, n_1$ , всех пар лаговых показателей  $N_{ij}(k)$ ,  $i = 1, \dots, 11, j = i+1, \dots, 12, k = 1, \dots, n_2$  и троек, включающих анализируемый показатель и всевозможные пары лаговых показателей  $N_{0ij}(k)$ ,  $i = 1, \dots, 11, j = i+1, \dots, 12, k = 1, \dots, n_3$ , как

точек с расстоянием от соответствующего центра не превышающем  $\frac{eps}{2}$ . Энтропии показателей определяются как

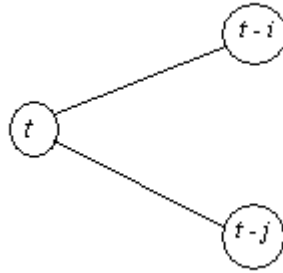
$$\begin{aligned} h1 &= \sum_{k=1}^{n_1} N_0(k) \log_2 N_0(k) - \log_2 nn, \\ h2(i, j) &= \sum_{k=1}^{n_2} N_{ij}(k) \log_2 N_{ij}(k) - \log_2 nn, i = 1, \dots, 11, j = i+1, \dots, 12, \\ h3(0, i, j) &= \sum_{k=1}^{n_3} N_{0ij}(k) \log_2 N_{0ij}(k) - \log_2 nn, i = 1, \dots, 11, j = i+1, \dots, 12 \end{aligned}$$

Количества информации рассчитываются по формуле:

$$I(t, t-i, t-j) = h1 + h2(i, j) - h3(0, i, j), i = 1, \dots, 11, j = i + 1, \dots, 12.$$

Максимальное из полученных  $I(t, t-i, t-j)$  и определяет лаговую структуру модели прогнозирования. Таким образом, если  $(i_0, j_0) = \operatorname{argmax}\{I(t, t-i, t-j) \mid i = 1, \dots, 11, j = i + 1, \dots, 12\}$ , то значения исследуемого показателя с лагами  $(i_0, j_0)$  несут в совокупности наибольшую информацию о его значении в момент времени  $t$ , т.е. лаговая структура будет иметь вид

### 6.2.2.3. Построение условного математического ожидания



Основой моделей прогнозирования (6.2.1) и (6.2.2) являются условные распределения вероятностей того, что случайная величина  $\xi$  (или  $\zeta$ ) принимает некоторое значение в момент времени  $t$  при известных ее значениях в моменты времени  $t-i$  и  $t-j$ , где запаздывания  $i$  и  $j$  определены так, как это указано в 2.2.2. Опишем алгоритм построения соответствующих условных распределений вероятностей. В Приложении П1.2 приведен макрос (Прогноз3()), реализующий этот алгоритм.

На первом этапе, так же как и для выявления наиболее информативных лагов, производится нормировка исходных данных так, чтобы они изменялись в диапазоне от 0 до 1:

$$idn(i) = \frac{id(i) - \min_{1 \leq j \leq nn} id(j)}{\max_{1 \leq j \leq nn} id(j) - \min_{1 \leq j \leq nn} id(j)},$$

где  $id(1), \dots, id(nn)$ ,  $nn$  – длина ряда по которому строится модель. На этом же шаге задается уровень табуляции данных ( $eps$ ) и задаются лаги, определенные ранее в результате работы программы Информации3(), от значений которых строится условное распределение вероятностей.



На следующем этапе для заданных значений лаговых переменных  $z_{t-i} = z^{(1)}$  и  $z_{t-j} = z^{(2)}$  определяется набор значений прогнозируемой переменной  $z_t = z^{(0)}$ , таких что расстояние в трехмерном пространстве от тройки значений  $\{z_t, z_{t-i}, z_{t-j}\}$  до  $\{z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}\}$  не превосходит  $eps$ , т.е.

$$ro(\{z_t, z_{t-i}, z_{t-j}\} | \{z^{(0)}, z^{(1)}, z^{(2)}\}) = \sqrt{(z_t - z^{(0)})^2 + (z_{t-i} - z^{(1)})^2 + (z_{t-j} - z^{(2)})^2} \leq eps$$

Если таких наборов  $N$ , то условное математическое ожидание значения  $z_{t+l}$  при заданных  $z_{t-i+l} = z^{(1)}$  и  $z_{t-j+l} = z^{(2)}$  определяется как  $\frac{1}{N} \sum z^{(0)}$ .

#### 6.2.2.4. Построение прогноза

Реализуем два метода имитации и пять методов прогнозирования следующим образом.

**1. Трендовая имитация.** Служит для проверки качества трендовой модели прогнозирования за период  $13, \dots, T$  при месячных данных или  $5, \dots, T$  – при квартальных, где  $T$  – длина ряда  $x_t$ , использованного для построения функции прогнозирования. Полученная функция прогнозирования  $\varphi(t|\Gamma(t))$  вида (6.2.1) используется в данном случае следующим образом.

Строится ряд  $\{x_t\}_{t=\tau}^T$  ( $\tau = 5$  или  $13$  в зависимости от того, квартальные или месячные данные рассматриваются):

$$x_t = \varphi(t|\Gamma(t)) = f(t) + \sum_{k=1}^N x^{(k)} p \{x_t = x^{(k)} | x_{t-i}, x_{t-j}\} \Gamma(t) = \{i, j\} t = \tau, \dots, T$$

Здесь  $N$  – количество градаций, полученное при табулировании случайной величины  $\xi$ . Качество имитации оценивается величиной средней относительной ошибки (MAPE):

$$\delta = \frac{100}{T - \tau + 1} \sum_{t=\tau}^T \frac{|x_t - x_t|}{x_t}.$$

Реализуется трендовая имитация использованием макроса Прогноз3() с параметрами: tau1 = i, tau2 = j, t = T, tt =  $\tau$ , ttt = T, eps = 0,005.

**2. Трендовый прогноз без обучения.** Служит для проверки качества трендовой модели прогнозирования за период  $T \div T + T'$ , где  $T$  – длина ряда  $x_t$ , использованного для построения функции прогнозирования, а  $T'$  – горизонт прогнозирования. Функция прогнозирования  $\varphi(t|\Gamma(t))$  используется в данном случае следующим образом. Строится ряд :  $\{x_t\}_{t=T+1}^{T+T'}$

$$\mathfrak{E}_t = \varphi(\Gamma(t)) = f(t) + \sum_{k=1}^N x^{(k)} p \left\{ \mathfrak{E}_t = x^{(k)} \middle| x_{t-i}, x_{t-j} \right\} \Gamma(t) = \{i, j\} t = T+1, \dots, T+T'$$

Здесь  $N$  – количество градаций, полученное при табулировании случайной величины  $\xi$ . Качество прогноза также оценивается величиной средней абсолютной процентной ошибки (MAPE)

$$\delta = \frac{100}{T'} \sum_{t=\tau}^T \frac{|x_t - \mathfrak{E}_t|}{x_t}.$$

Реализуется трендовый прогноз без обучения использованием макроса Прогноз3() с параметрами: tau1 =  $i$ , tau2 =  $j$ , t =  $T$ , tt =  $\tau$ , ttt =  $T + T'$ , eps = 0,005.

**3. Трендовый прогноз с обучением без коррекции тренда.** Служит также для проверки качества трендовой модели прогнозирования за период  $T \div T + T'$ , где  $T$  – длина ряда  $x_t$ , использованного для построения функции прогнозирования, а  $T'$  – горизонт прогнозирования. Функция прогнозирования  $\varphi(t|\Gamma(t))$  используется в данном случае следующим образом. Строится ряд  $\{\mathfrak{E}_t\}_{t=T+1}^{T+T'}$ :

$$\mathfrak{E}_t = \varphi(\Gamma(t)) = f(t) + \sum_{k=1}^N x^{(k)} p \left\{ \mathfrak{E}_t = x^{(k)} \middle| x_{t-i}, x_{t-j} \right\} \Gamma(t) = \{i, j\} t = T+1, \dots, T+T'$$

Здесь  $N$  – количество градаций, полученное при табулировании случайной величины  $\xi$ . Однако в отличие от предыдущего случая в данном случае на каждом шаге уточняется условное распределение вероятностей  $p \left\{ \mathfrak{E}_t = x^{(k)} \middle| x_{t-i}, x_{t-j} \right\}$ . Качество прогноза оценивается величиной средней абсолютной процентной ошибки (MAPE)

$$\delta = \frac{100}{T'} \sum_{t=\tau}^T \frac{|x_t - \mathfrak{E}_t|}{x_t}.$$

Реализуется трендовый прогноз с обучением без коррекции тренда  $T'$ -кратным использованием макроса Прогноз3(). При  $k$ -м ( $k = 1, \dots, T'$ ) применении макроса применяются параметры: tau1 =  $i$ , tau2 =  $j$ , t =  $T + k - 1$ , tt =  $\tau$ , ttt =  $T + k$ , eps = 0,005.

**4. Трендовый прогноз с обучением и коррекцией тренда.** Служит также для проверки качества трендовой модели прогнозирования на временном интервале  $T \div T + T'$ , где  $T$  – длина ряда  $x_t$ , использованного для построения функции прогнозирования, а  $T'$  – горизонт прогнозирования. Функция прогнозирования  $\varphi(t|\Gamma(t))$  используется в данном случае следую-

щим образом. Строится ряд  $\{x_t\}_{t=T+1}^{T+T'}$ :

$$\mathcal{E}_t = \varphi(\Gamma(t)) = f(t) + \sum_{k=1}^N x^{(k)} p\{\mathcal{E}_t = x^{(k)} | x_{t-i}, x_{t-j}\} \Gamma(t) = \{i, j\} t = T+1, \dots, T+T'$$

Здесь  $N$  – количество градаций, полученное при табулировании случайной величины  $\xi$ . Однако в отличие от предыдущего случая в данном случае на каждом шаге уточняется не только условное распределение вероятностей

$p\{\mathcal{E}_t = x^{(k)} | x_{t-i}, x_{t-j}\}$ , но и функция тренда  $f(t)$ . Качество прогноза оценивается величиной средней абсолютной процентной ошибки (MAPE)

$$\delta = \frac{100}{T'} \sum_{t=\tau}^T \frac{|x_t - \mathcal{E}_t|}{x_t}.$$

Реализуется трендовый прогноз с обучением и коррекцией тренда  $T'$ -кратным использованием макроса Прогноз3(). Перед  $k$ -м ( $k = 1, \dots, T'$ ) при-

менением макроса производится пересчет тренда по ряду  $\{x_t\}_{t=1}^{T+k-1}$ , после чего к макросу применяются параметры: tau1 =  $i$ , tau2 =  $j$ ,  $t = T + k - 1$ , tt =  $\tau$ , ttt =  $T + k$ , eps = 0,005.

**5. Вероятностная имитация.** Служит для проверки качества вероятностной модели прогнозирования на временном интервале  $13 \div T$  при месячных данных или  $5 \div T$  – при квартальных, где  $T$  – длина ряда  $x_t$ , использованного для построения функции прогнозирования. Полученная функция прогнозирования  $\psi(t|\Delta(t))$  вида (6.2.2) используется в данном случае следующим образом. Строится ряд  $\{x_t\}_{t=\tau}^T$  ( $\tau = 5$  или  $13$  в зависимости от того, квартальные или месячные данные рассматриваются):.

$$\mathcal{E}_t = \psi(\ell|\Delta(t)) = x_{t-1} \sum_{k=1}^N y^{(k)} p\{\mathcal{E}_t = y^{(k)} | y_{t-i}, y_{t-j}\} \Delta(t) = \{i, j\} t = \tau, \dots, T$$

Здесь  $N$  – количество градаций, полученное при табулировании случайной величины  $\zeta$ . Качество имитации оценивается величиной средней относительной ошибки (MAPE):

$$\delta = \frac{100}{T - \tau + 1} \sum_{t=\tau}^T \frac{|x_t - \mathcal{E}_t|}{x_t}.$$

Реализуется вероятностная имитация использованием макроса Прогноз3() с параметрами: tau1 =  $i$ , tau2 =  $j$ ,  $t = T$ , tt =  $\tau$ , ttt =  $T$ , eps = 0,005.

**6. Вероятностный прогноз без обучения.** Служит для проверки качества вероятностной модели прогнозирования на временном интервале  $T \div T + T^*$ , где  $T$  – длина ряда  $x_t$ , использованного для построения функции прогнозирования, а  $T^*$  – горизонт прогнозирования. Функция прогнозирования  $\psi(t|\Delta(t))$  используется в данном случае следующим образом. Строится ряд  $\{x_t\}_{t=T+1}^{T+T^*}$  :

$$\epsilon_t = \psi(t|\Delta(t)) = x_{t-1} \sum_{k=1}^N y^{(k)} p \{y_t = y^{(k)} | y_{t-i}, y_{t-j}\} \Delta(t) = \{\epsilon, j\} t = \tau, \dots, T$$

Здесь  $N$  – количество градаций, полученное при табулировании случайной величины  $\zeta$ . Качество прогноза оценивается величиной средней абсолютной процентной ошибки (MAPE)

$$\delta = \frac{100}{T^*} \sum_{t=\tau}^T \frac{|x_t - \epsilon_t|}{x_t}.$$

Реализуется вероятностный прогноз без обучения с использованием макроса Прогноз3() с параметрами: tau1 =  $i$ , tau2 =  $j$ , t =  $T$ , tt =  $\tau$ , ttt =  $T + T^*$ , eps = 0,005.

**7. Вероятностный прогноз с обучением.** Служит также для проверки качества вероятностной модели прогнозирования на временном интервале  $T \div T + T^*$ , где  $T$  – длина ряда  $x_t$ , использованного для построения функции прогнозирования, а  $T^*$  – горизонт прогнозирования. Функция прогнозирования  $\psi(t|\Delta(t))$  используется в данном случае следующим образом. Строится ряд

$$\epsilon_t = \psi(t|\Delta(t)) = x_{t-1} \sum_{k=1}^N y^{(k)} p \{y_t = y^{(k)} | y_{t-i}, y_{t-j}\} \Delta(t) = \{\epsilon, j\} t = \tau, \dots, T$$

Здесь  $N$  – количество градаций, полученное при табулировании случайной величины  $\zeta$ . Однако в отличие от предыдущего случая, в данном случае на каждом шаге уточняется условное распределение вероятностей  $p \{y_t = y^{(k)} | y_{t-i}, y_{t-j}\}$ . Качество прогноза оценивается величиной средней абсолютной процентной ошибки (MAPE)

$$\delta = \frac{100}{T^*} \sum_{t=\tau}^T \frac{|x_t - \epsilon_t|}{x_t}.$$

Реализуется вероятностный прогноз с обучением  $T^*$ -кратным использованием макроса Прогноз3(). При  $k$ -м ( $k = 1, \dots, T^*$ ) применении макроса используются параметры: tau1 =  $i$ , tau2 =  $j$ , t =  $T + k - 1$ , tt = , ttt =  $T + k$ , eps = 0,005.

6.3. Результаты расчетов

6.3.1. Инфляция

В качестве исходных данных для построения трендовой модели прогнозирования инфляции используются месячные данные за период 01.1991 – 08.2000. Данные за период 09.2000 – 12.2001 используются для проверки построенных в разделе моделей прогнозирования. График этих данных приведен на *рис. 6.3.1.*

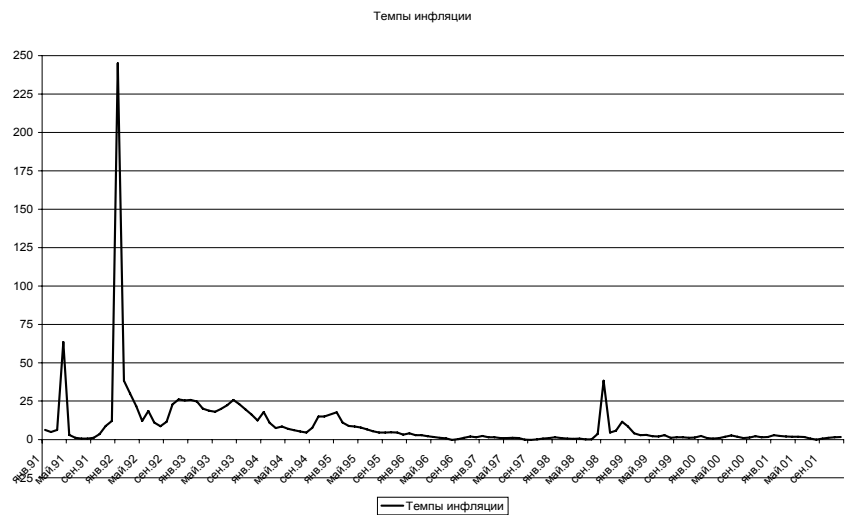


Рис. 6.3.1. Исходные данные

В соответствии с проведенным ранее исследованием ряда инфляции<sup>11</sup> разобьем весь интервал наблюдений на 3 подинтервала: 01.1991 – 12.1991; 01.1992 – 08.1998; 09.1998 – 08.2000. Для каждого из этих интервалов построим детерминированный логарифмический тренд. Получаем

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t)=68,767-28,826\ln t, & t=1,...,12; \\ f_2(t)=119,028-27,854\ln t, & t=13,...,92; \\ f_3(t)=293,892-62,311\ln t, & t=93,...,116. \end{cases}$$

<sup>11</sup> Здесь и далее при выборе функционального вида тренда мы ориентируемся на проведенное ранее исследование «Эконометрический анализ динамических рядов основных макроэкономических показателей». М.: ИЭПП, 2001.

Характеристики построенных трендов приведены в табл. 6.3.1.

Рассмотрим временной ряд  $\{y_t\} = \{x_t - f(t)\}$ . Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных:  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя  $y_t$  от лага в 1 и 5 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,872. Это означает, что значения инфляции 1 и 5 месяцев назад определяют сегодняшнюю инфляцию на 87,2%. Таким образом, модель прогнозирования инфляции имеет вид

$$\tilde{x}_t = f_3(t) + \sum_{y \in Y} \mathcal{Y}P(y|y_{t-1}, y_{t-5}).$$

Таблица 6.3.1

Тренд	R	Нормированный R <sup>2</sup>	F-статистика	t-статистика c <sub>0</sub>	t-статистика c <sub>1</sub>
$f_1(t)$	0,527	0,175	2,695	1,908	−1,542
$f_2(t)$	0,528	0,269	30,132	6,052	−5,489
$f_3(t)$	0,550	0,270	9,520	3,131	−3,085

На рис.6.3.2 приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации близки между собой. Средняя относительная ошибка имитации (MAPE) за период 01.1992 – 08.2000 составляет 0,40%<sup>12</sup>.

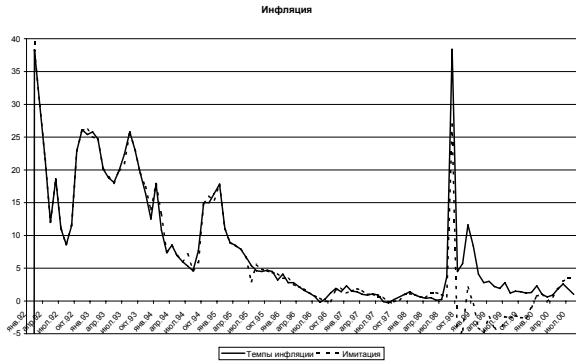


Рис. 6.3.2. Имитация

<sup>12</sup> В связи с тем, что значение инфляции может равняться 0, для расчета относительной ошибки прогноза используется не темп прироста, а темп роста.

Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период 09.2000 – 12.2001. Построено три последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-1}, y_{t-5})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и две с обучением (в обоих случаях на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-1}, y_{t-5})$  уточняется за счет добавления новой точки, но в одном используется один и тот же тренд, а во втором тренд корректируется на каждом шаге). В табл. 6.3.2 и на рис. 6.3.3 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. При этом для случая прогноза с обучением и коррекцией тренда коэффициенты функции  $f_3$  меняются от шага к шагу. Соответствующие коэффициенты приведены в табл. 6.3.3. Средняя ошибка прогноза без обучения составляет 6,21%, а с обучением – 1,00% без коррекции тренда и 0,76% – с коррекцией.

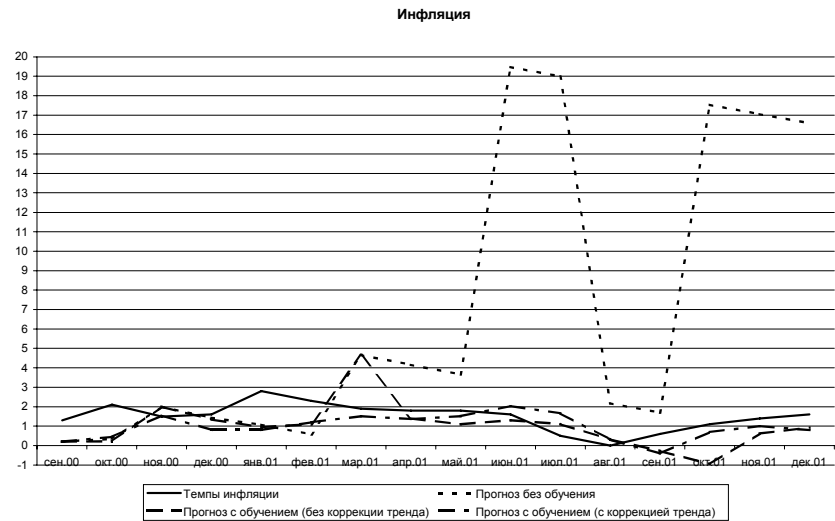


Таблица 6.3.2

Трендовый прогноз инфляции

Дата	ИПЦ	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением (без коррекции тренда)		Прогноз с обучением (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошибка	результат	ошибка
сен.00	1,3	0,20	1,08	0,20	1,08	0,20	1,08
окт.00	2,1	0,35	1,72	0,22	1,84	0,45	1,62
ноя.00	1,5	2,00	0,49	2,00	0,49	1,55	0,05
дек.00	1,6	1,43	0,17	1,34	0,26	0,80	0,78
январь.01	2,8	1,07	1,68	0,95	1,80	0,80	1,95
фев.01	2,3	0,57	1,69	1,10	1,18	1,20	1,07
март.01	1,9	4,66	2,71	4,66	2,71	1,51	0,38
апр.01	1,8	4,16	2,31	1,40	0,40	1,36	0,43
май.01	1,8	3,66	1,82	1,10	0,69	1,51	0,28
июнь.01	1,6	19,48	17,60	1,30	0,29	2,04	0,43
июль.01	0,5	18,98	18,39	1,11	0,60	1,66	1,15
авг.01	0,0	2,18	2,18	0,31	0,31	0,31	0,31
сентябрь.01	0,6	1,69	1,09	-0,27	0,87	-0,41	1,00
октябрь.01	1,1	17,53	16,25	-0,95	2,03	0,70	0,39
ноябрь.01	1,4	17,05	15,44	0,62	0,77	1,01	0,39
декабрь.01	1,6	16,58	14,74	0,93	0,66	0,79	0,79
Средняя ошибка про- гноза		6,21			1,00		0,76

Таблица 6.3.3

$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$
117	293,892	62,311	121	227,708	47,963	125	177,273	37,058	129	152,812	31,781
118	276,099	58,450	122	211,052	44,359	126	168,425	35,148	130	148,167	30,781
119	256,748	54,254	123	197,754	41,483	127	160,763	33,495	131	142,712	29,607
120	241,722	50,998	124	186,909	39,139	128	156,183	32,508	132	137,006	28,380

Рассмотрим теперь вероятностную модель прогнозирования. В этом случае будем считать сами исходные данные реализациями некоторой случайной величины. Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных: показатель инфляции и лаговые значения до 12 месяцев, т.е. для системы  $\{x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя инфляции от лага в 1 и 12 месяцев с коэффициентом ин-



формативности, равным 0,832. Это означает, что значения инфляции 1 и 12 месяцев назад определяют сегодняшнюю инфляцию на 83,2%. Таким образом, модель прогнозирования инфляции в данном случае имеет вид

$$\tilde{x}_t = \sum_{x \in X} xp(x|x_{t-1}, x_{t-12}).$$

На рис. 6.3.4 приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации и в этом случае близки между собой. Средняя относительная ошибка имитации (МАРЕ) за период 01.1992–08.2000 составляет 0,94% (против 0,40% в предыдущем случае).

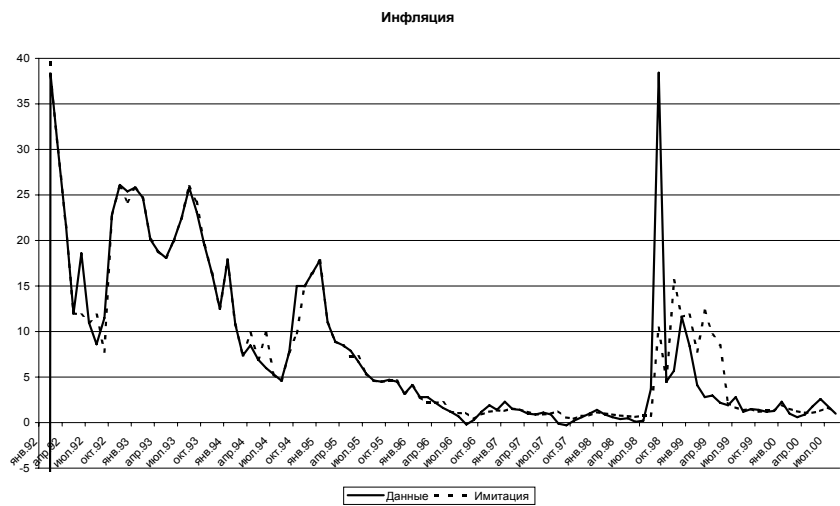


Рис. 6.3.4. Имитация

Для проверки качества прогнозирования, как и выше, использованы данные за период 09.2000 – 12.2001. Построены две последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(x_t|x_{t-1}, x_{t-12})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и с обучением (на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(x_t|x_{t-1}, x_{t-12})$  уточняется за счет добавления новой точки). В табл. 6.3.4 и на рис. 6.3.5 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. Средняя ошибка прогноза (МАРЕ) без обучения составляет 0,45%, а с обучением – 0,41%. Таким образом, в данном случае прогнозные свойства модели оказались выше.

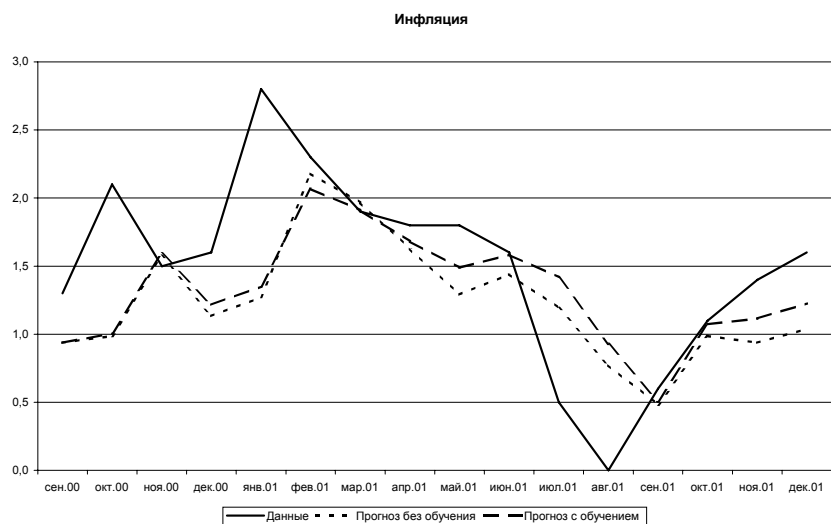


Рис. 6.3.5. Прогноз

Таблица 6.3.4

**Вероятностный прогноз инфляции**

Дата	ИПЦ	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	Ошибка
сен.00	1,3	0,94	0,36	0,94	0,36
окт.00	2,1	0,99	1,09	1,01	1,07
ноя.00	1,5	1,58	0,07	1,59	0,09
дек.00	1,6	1,13	0,46	1,22	0,38
янв.01	2,8	1,27	1,49	1,35	1,41
фев.01	2,3	2,18	0,12	2,07	0,23
мар.01	1,9	1,97	0,07	1,91	0,01
апр.01	1,8	1,63	0,17	1,68	0,12
май.01	1,8	1,29	0,50	1,49	0,31
июн.01	1,6	1,44	0,16	1,58	0,02
июл.01	0,5	1,19	0,69	1,42	0,91
авг.01	0,0	0,77	0,77	0,93	0,93
сен.01	0,6	0,48	0,12	0,51	0,09
окт.01	1,1	0,99	0,11	1,07	0,03
ноя.01	1,4	0,94	0,46	1,11	0,28
дек.01	1,6	1,04	0,55	1,23	0,37
Средняя ошибка прогноза			0,45		0,41

### 6.3.2. Денежные агрегаты

#### 6.3.2.1. Денежный агрегат $M0$

В качестве исходных данных для построения модели прогнозирования денежного агрегата  $M0$  используются месячные данные за период 12.1990–07.2000. Данные за период 08.2000 – 11.2001 используются для проверки построенных в разделе моделей прогнозирования. График этих данных приведен на рис. 6.3.6.

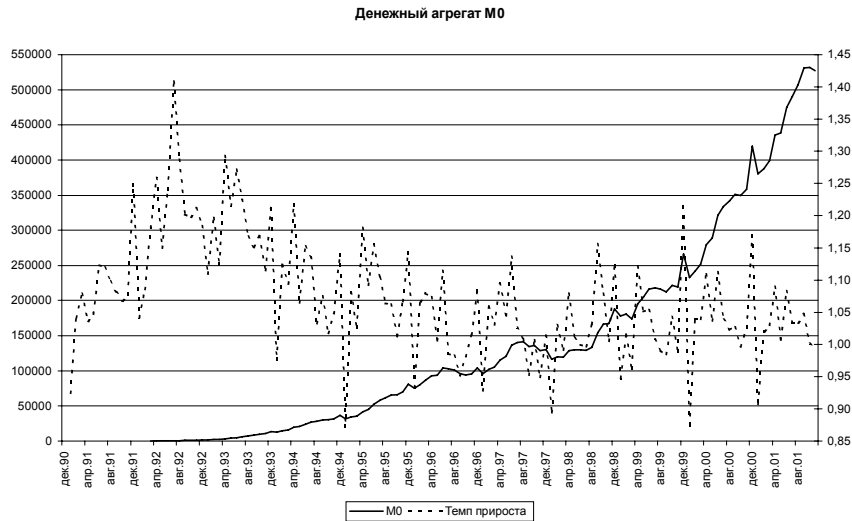


Рис. 6.3.6. Исходные данные

В соответствии с проведенным ранее исследованием ряда  $M0$  на временном интервале 06.1995 – 07.2000 данный ряд является  $DS$ -рядом. В то же время визуальный анализ графика ряда позволяет предположить изменение характера его поведения начиная со второй половины 1998 г. Разобьем весь интервал наблюдений на 2 подинтервала: 12.1990 – 08.1998 и 09.1998 – 07.2000. Для каждого из этих интервалов построим детерминированный линейный тренд. Получаем

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) = -33648,821 + 1777,917t, & t = 1, \dots, 92; \\ f_2(t) = -498483,752 + 6869,279t, & t = 93, \dots, 116. \end{cases}$$

Характеристики построенных трендов приведены в табл. 6.3.5.

Таблица 6.3.5

Тренд	R	Нормированный R <sup>2</sup>	F-статистика	t-статистика c <sub>0</sub>	t-статистика c <sub>1</sub>
f <sub>1</sub> (t)	0,948	0,898	803,356	-10,018	28,344
f <sub>2</sub> (t)	0,949	0,896	198,324	-9,758	14,083

Рассмотрим временной ряд  $\{y_t\} = \{x_t - f(t)\}$ . Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных:  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя  $y_t$  от лага в 2 и 12 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,875. Это означает, что значения  $M0$  2 и 12 месяцев назад определяют сегодняшнее значение  $M0$  на 87,5%. Таким образом, модель прогнозирования инфляции имеет вид

$$\tilde{x}_t = f_2(t) + \sum_{y \in Y} yp(y|y_{t-2}, y_{t-12}).$$

На рис. 6.3.7. приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации полностью совпадают между собой.

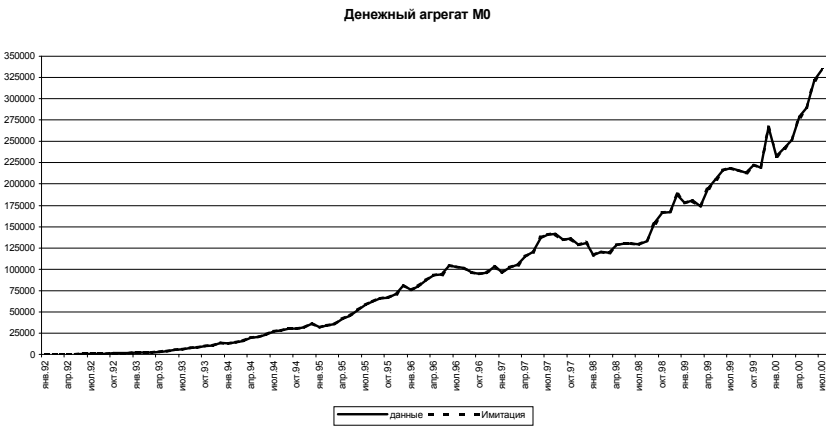


Рис. 6.3.7. Имитация

Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период 09.2000 – 11.2001. Построены три последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t|y_{t-2}, y_{t-12})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и два

с обучением (в обоих случаях на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t|y_{t-2}, y_{t-12})$  уточняется за счет добавления новой точки, но в одном используется один и тот же тренд, а во втором тренд корректируется на каждом шаге). В табл. 6.3.6. и на рис. 6.3.8. приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. При этом для случая прогноза с обучением и коррекцией тренда коэффициенты функции  $f_2$  меняются от шага к шагу. Соответствующие коэффициенты приведены в табл. 6.3.7. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 23,99%, а с обучением 4,18% без коррекции тренда и 5,14% с коррекцией.

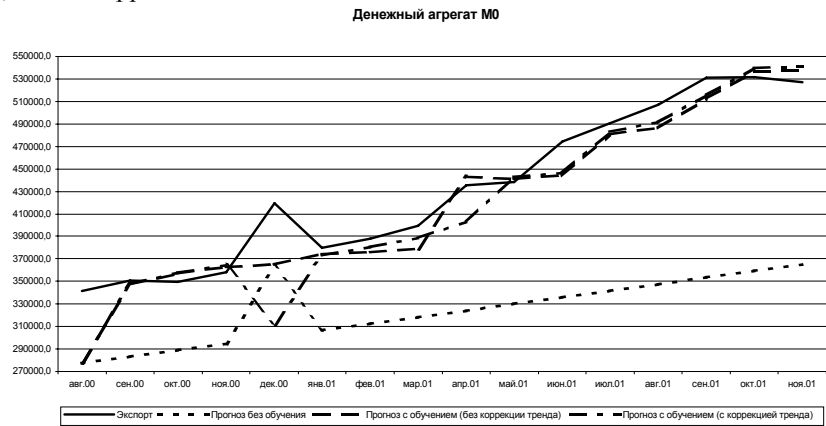


Рис. 6.3.8. Прогноз

Таблица 6.3.6

Трендовый прогноз М0							
Дата	М0	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением (без коррекции тренда)		Прогноз с обучением (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошибка	результат	ошибка
авг 00	341627	277192,1	18,86	277192,1	18,86	277192,1	18,86
сен 00	350935	283049,8	19,34	347484,4	0,98	347820,8	0,89
окт 00	349669	288907,5	17,38	356793,0	2,04	357432,8	2,22
ноя 00	358351	294765,2	17,74	362650,7	1,20	364353,5	1,67
дек 00	419262	363325,4	13,34	365057,4	12,93	310995,4	25,82
январь 01	380127	306480,5	19,37	374366,0	1,52	372863,4	1,91
фев 01	387959	312338,2	19,49	375924,3	3,10	380543,5	1,91

Таблица 6.3.6 (продолжение)

Дата	M0	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением (без коррекции тренда)		Прогноз с обучением (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошибка	результат	ошибка
мар 01	399395	318195,9	20,33	378957,1	5,12	388418,4	2,75
апр 01	435350	324053,6	25,56	442692,3	1,69	402716,0	7,50
май 01	438312	329911,3	24,73	441207,2	0,66	443203,0	1,12
июн 01	474692	335769,0	29,27	444169,2	6,43	446336,0	5,97
июл 01	490598	341626,6	30,37	480549,4	2,05	482953,8	1,56
авг 01	507107	347484,3	31,48	486407,1	4,08	491682,2	3,04
сен 01	530972	353342,0	33,45	512964,8	3,39	515831,7	2,85
окт 01	531481	359199,7	32,42	536829,4	1,01	539938,6	1,59
ноя 01	527287	365057,4	30,77	537338,9	1,91	540645,2	2,53
Средняя ошибка прогноза			23,99		4,18		5,14

Таблица 6.3.7

$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$
117	-498483,752	6869,279	121	-589828,211	7773,412
118	-532312,207	7205,323	122	-638019,335	8245,874
119	-560816,089	7487,540	123	-646040,710	8324,259
120	-576472,511	7642,044	124	-652322,303	8385,443

Таблица 6.3.7 (продолжение)

$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$
125	-659299,727	8453,185	129	-745936,517	9287,212
126	-680298,565	8656,399	130	-770499,627	9521,892
127	-694883,545	8797,091	131	-797546,854	9779,485
128	-720806,658	9046,351	132	-816958,807	9963,775

Рассмотрим теперь вероятностную модель прогнозирования. Поскольку в исходных данных явно содержится детерминированный тренд, то преобразуем их в темповые характеристики, т.е. введем новый ряд:  $y_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}, t = 1, \dots, T$ . График соответствующего временного ряда также приведен на рис. 6.3.6.

Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных: показатель темпа роста  $M0$  и его лаговые значения

до 12 месяцев, т.е. для системы  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя темпа роста  $M0$  от лага в 2 и 12 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,967. Это означает, что значения темпов роста  $M0$  2 и 12 месяцев назад определяют сегодняшний темп роста на 96,7%. Таким образом, модель прогнозирования безработицы в данном случае имеет вид:

$$\tilde{x}_t = x_{t-1} \sum_{y \in Y} yp(y|y_{t-2}, y_{t-12}).$$

На *рис. 6.3.9.* приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации на временном интервале 01.1992 – 07.2000 и в этом случае полностью совпадают.

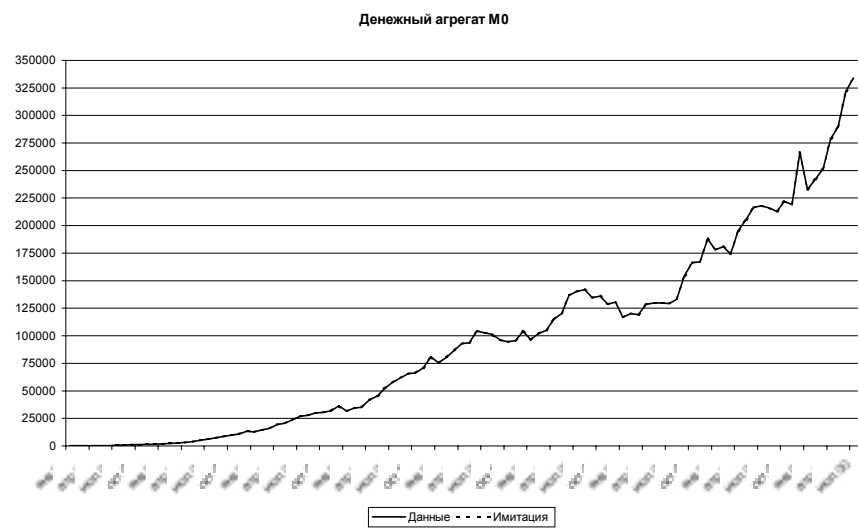


Рис. 6.3.9. Имитация

Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период 08.2000 – 11.2001. Построены две последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t|y_{t-2}, y_{t-12})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и с обучением (на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t|y_{t-2}, y_{t-12})$  уточняется за счет добавления новой точки). В *табл. 6.3.8.* и на *рис. 6.3.10.* приведены результаты од-

ношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 4,12%, а с обучением 4,19%.

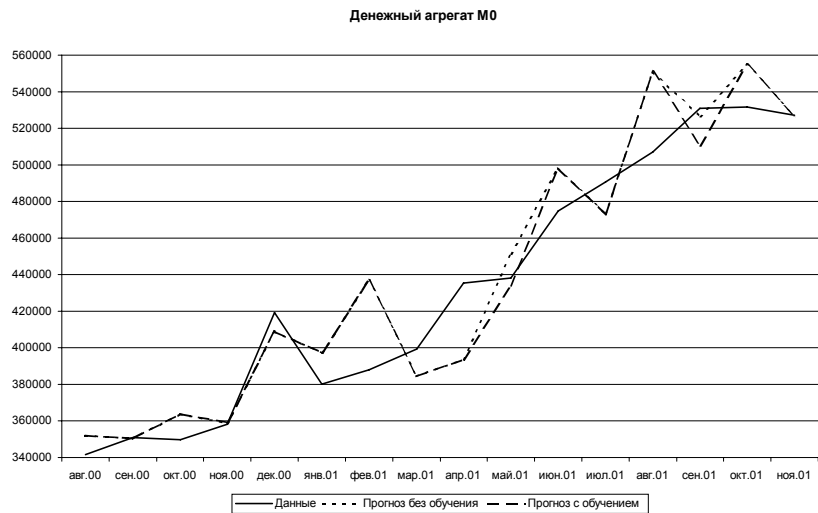


Рис. 6.3.10. Прогноз

Таблица 6.3.8

Вероятностный прогноз М0

Дата	М0	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	ошибка
авг.00	341627	352103,7	3,07	352103,7	3,07
сен.00	350935	350478,7	0,13	350478,7	0,13
окт.00	349669	363772,3	4,03	363772,3	4,03
ноя.00	358351	358729,1	0,11	359196,4	0,24
дек.00	419262	408772,7	2,50	408772,7	2,50
январ.01	380127	397323,5	4,52	397323,5	4,52
фев.01	387959	436968,3	12,63	436968,3	12,63
мар.01	399395	384384,3	3,76	384384,3	3,76
апр.01	435350	393586,1	9,59	393586,1	9,59
май.01	438312	451274,3	2,96	433778,2	1,03
июн.01	474692	498329,0	4,98	498329,0	4,98



Таблица 6.3.8 (продолжение)

Дата	M0	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	ошибка
июл.01	490598	472936,4	3,60	472936,4	3,60
авг.01	507107	550940,7	8,64	550940,7	8,64
сен.01	530972	526446,3	0,85	510557,3	3,84
окт.01	531481	554666,3	4,36	554666,3	4,36
ноя.01	527287	526652,7	0,12	526652,7	0,12
Средняя ошибка прогноза			4,12		4,19

6.3.2.2. Денежный агрегат M1

В качестве исходных данных для построения модели прогнозирования денежного агрегата M1 используются месячные данные за период 6.1995 – 07.2000. Данные за период 08.2000 – 11.2001 используются для проверки построенных в разделе моделей прогнозирования. График этих данных приведен на рис. 6.3.11.

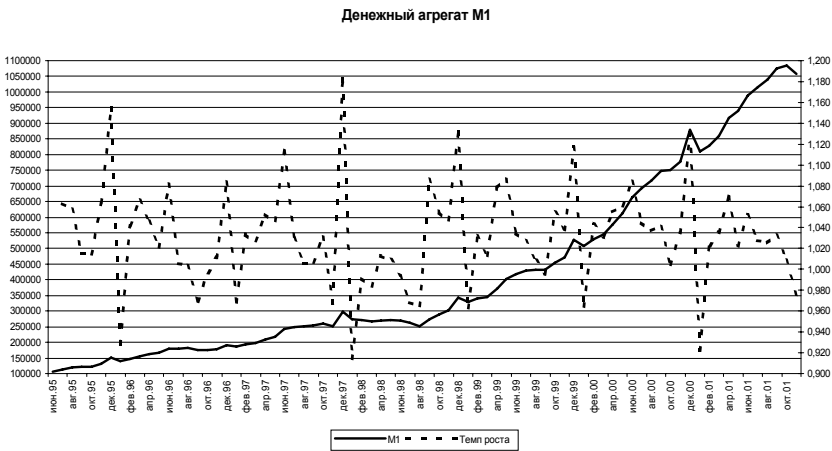


Рис. 6.3.11. Исходные данные

В соответствии с проведенным ранее исследованием ряда M1 на временном интервале 06.1995 – 07.2000 данный ряд, так же как и ряд M0, является DS-рядом. В то же время визуальный анализ графика ряда позволяет

предположить изменение характера его поведения начиная со второй половины 1998 г. Разобьем весь интервал наблюдений на 2 подинтервала: 12.1990 – 08.1998 и 09.1998 – 07.2000. Для каждого из этих интервалов построим детерминированный линейный тренд. Получаем

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t)=104389,501+4895,270t, & t=1,...,38; \\ f_2(t)=-498483,752+6869,279t, & t=39,...,62. \end{cases}$$

Характеристики построенных трендов приведены в табл. 6.3.9.

Таблица 6.3.9

Тренд	R	Нормированный R	F-статистика	t-статистика c <sub>0</sub>	t-статистика c <sub>1</sub>
$f_1(t)$	0,974	0,947	659,906	24,486	25,689
$f_2(t)$	0,983	0,964	622,377	-12,093	24,947

Рассмотрим временной ряд  $\{y_t\} = \{x_t - f(t)\}$ . Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных:  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя  $y_t$  от лага в 6 и 9 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,943. Это означает, что значения  $MI$  6 и 9 месяцев назад определяют сегодняшнее значение  $MI$  на 94,3%. Таким образом, модель прогнозирования инфляции имеет вид

$$\tilde{x}_t = f_2(t) + \sum_{y \in Y} \gamma_P(y|y_{t-6}, y_{t-9}).$$

На рис. 6.3.12. приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели на временном интервале 03.1996–07.2000. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации полностью совпадают между собой.

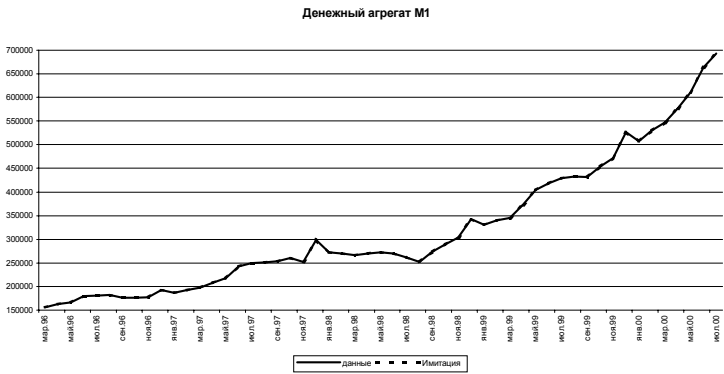
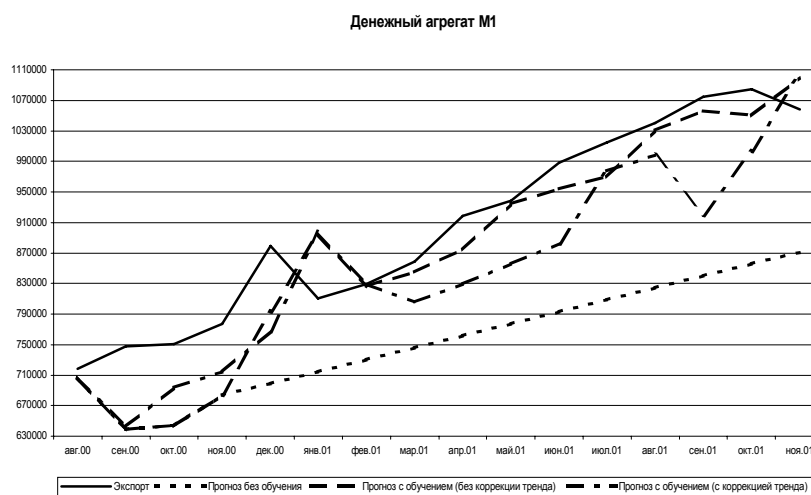


Рис. 6.3.12. Имитация



Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период 09.2000 – 11.2001. Построены три последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-6}, y_{t-9})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и два с обучением (в обоих случаях на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-6}, y_{t-9})$  уточняется за счет добавления новой точки, но в одном используется один и тот же тренд, а во втором тренд корректируется на каждом шаге). В табл. 6.3.10 и на рис. 6.3.13 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. При этом для случая прогноза с обучением и коррекцией тренда коэффициенты функции  $f_2$  меняются от шага к шагу. Соответствующие коэффициенты приведены в табл. 6.3.11. Средняя ошибка прогноза (МАРЕ) без обучения составляет 15,96%, а с обучением 5,46% без коррекции тренда и 7,75% с коррекцией.

Таблица 6.3.10

Трендовый прогноз М1

Дата	М1	Прогноз без обуче- ния		Прогноз с обучени- ем (без коррекции тренда)		Прогноз с обучени- ем (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошиб- ка	результат	ошибка
авг 00	717950	708005,0	1,39	708005,0	1,39	708005,0	1,39
сен 00	747446	639197,4	14,48	639197,4	14,48	642942,8	13,98
окт 00	750662	643363,1	14,29	643363,1	14,29	693621,3	7,60
ноя 00	777139	683564,4	12,04	683564,4	12,04	714708,3	8,03
дек 00	879310	699181,8	20,49	792756,0	9,84	767490,9	12,72
янв 01	810517	714799,1	11,81	894927,1	10,41	897386,1	10,72
фев 01	829180	730416,4	11,91	826133,8	0,37	828812,7	0,04
мар 01	858381	746033,7	13,09	844797,4	1,58	806149,0	6,08
апр 01	918209	761651,1	17,05	873998,4	4,81	829197,2	9,69
май 01	938533	777268,4	17,18	933826,7	0,50	855851,5	8,81
июн 01	987901	792885,7	19,74	954150,3	3,42	882195,1	10,70
июл 01	1015090	808503,1	20,35	969767,7	4,46	977309,2	3,72
авг 01	1040765	824120,4	20,82	1030707,6	0,97	998373,8	4,07
сен 01	1074933	839737,7	21,88	1056382,1	1,73	919584,0	14,45
окт 01	1084385	855355,1	21,12	1050370,4	3,14	1003113,6	7,49
ноя 01	1058132	870972,4	17,69	1100002,3	3,96	1105310,5	4,46
Средняя ошибка прогноза			15,96		5,46		7,75

Таблица 6.3.11

$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$
63	-420876,239	17033,303	67	-508230,235	18889,100
64	-449189,900	17640,024	68	-548606,618	19730,275
65	-476375,476	18218,441	69	-554052,515	19842,949
66	-492468,326	18558,431	70	-558193,841	19928,044

Таблица 6.3.11 (продолжение)

$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$
71	-564210,774	20050,839	75	-627074,523	21311,866
72	-579725,874	20365,334	76	-642090,608	21608,236
73	-592736,408	20627,291	77	-657534,706	21911,061
74	-610556,706	20983,697	78	-668347,874	22121,707

Рассмотрим теперь вероятностную модель прогнозирования. Поскольку в исходных данных явно содержится детерминированный тренд, то преобразуем их в темповые характеристики, т.е. введем новый ряд:

$y_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}, t = 1, \dots, T$  График соответствующего временного ряда также приведен на *рис. 6.3.10*.

Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных: показатель темпа роста *М1* и его лаговые значения до 12 месяцев, т.е. для системы  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя темпа роста *М1* от лага в 6 и 7 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,969. Это означает, что значения темпов роста *М1* 6 и 7 месяцев назад определяют сегодняшний темп роста на 96,9%. Таким образом, модель прогнозирования безработицы в данном случае имеет вид:

$$\tilde{x}_t = x_{t-1} \sum_{y \in Y} yp(y|y_{t-6}, y_{t-7}).$$

На *рис. 6.3.14* приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации на временном интервале 03.1996 – 07.2000 и в этом случае полностью совпадают.

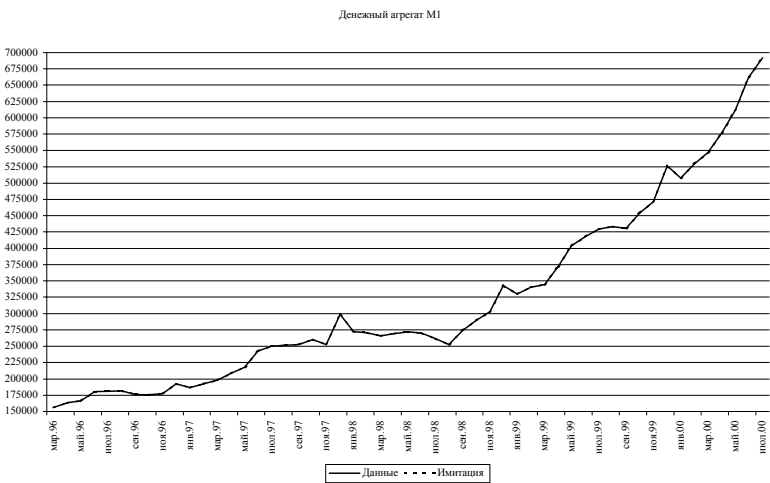


Рис. 6.3.14. Имитация

Для проверки качества прогнозирования, как и выше, использованы

данные за период 08.2000 – 11.2001. Построены две последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-6}, y_{t-7})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и с обучением (на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-6}, y_{t-7})$  уточняется за счет добавления новой точки). В табл. 6.3.12 и на рис. 6.3.15 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 5,22%, а с обучением – 4,75%.

### 6.3.2.3. Денежный агрегат M2

В качестве исходных данных для построения модели прогнозирования денежного агрегата M2 используются месячные данные за период 12.1990 – 07.2000. Данные за период 08.2000 – 11.2001 используются для проверки построенных в разделе моделей прогнозирования. График этих данных приведен на рис. 6.3.16.

В соответствии с проведенным ранее исследованием ряда M2 на временном интервале 06.1995 – 07.2000 данный ряд, также как и два предыдущих, является DS-рядом. В то же время визуальный анализ графика ряда позволяет предположить изменение характера его поведения начиная со второй половины 1998 г. Разобьем весь интервал наблюдений на 2 подинтервала: 12.1990 – 08.1998 и 09.1998 – 07.2000. Для каждого из этих интервалов построим детерминированный линейный тренд. Получаем

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) = -94369,716 + 4970,452t, & t = 1, \dots, 92; \\ f_2(t) = -1888494,862 + 23763,636t, & t = 93, \dots, 116. \end{cases}$$

Статистические характеристики построенных трендов приведены в табл. 6.3.13.

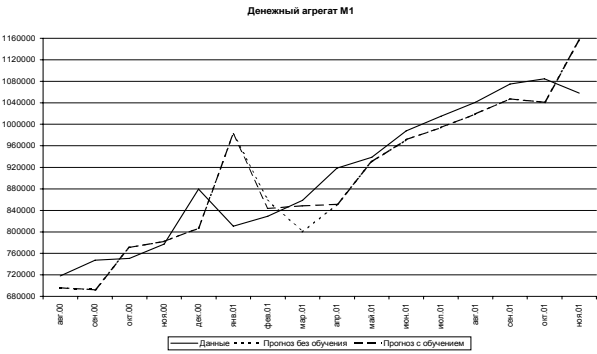


Рис. 6.3.15. Прогноз

Таблица 6.3.12

Вероятностный прогноз М1

Дата	М1	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	ошибка
авг.00	717950	696241,9	3,02	696241,9	3,02
сен.00	747446	692445,2	7,36	692445,2	7,36
окт.00	750662	770796,8	2,68	770796,8	2,68
ноя.00	777139	781978,5	0,62	781978,5	0,62
дек.00	879310	806620,7	8,27	806620,7	8,27
январь.01	810517	982236,3	21,19	982236,3	21,19
фев.01	829180	859480,3	3,65	843815,9	1,77
март.01	858381	799723,9	6,83	848273,5	1,18
апр.01	918209	851240,0	7,29	851240,0	7,29
май.01	938533	930178,3	0,89	930178,3	0,89
июнь.01	987901	971262,1	1,68	971262,1	1,68
июль.01	1015090	993563,9	2,12	993563,9	2,12
авг.01	1040765	1018845,0	2,11	1018845,0	2,11
сен.01	1074933	1047381,9	2,56	1047381,9	2,56
окт.01	1084385	1041058,3	4,00	1041058,3	4,00
ноя.01	1058132	1156347,1	9,28	1156347,1	9,28
Средняя ошибка прогноза			5,22		4,75

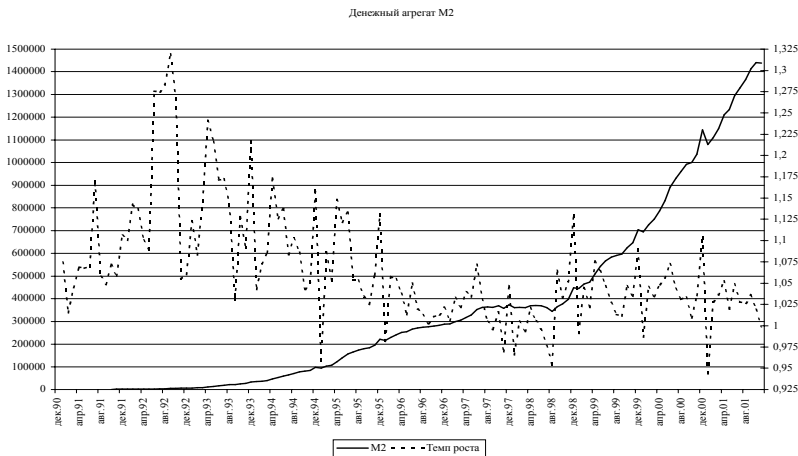


Рис. 6.3.16. Исходные данные

Таблица 6.3.13

Тренд	R	Нормированный R <sup>2</sup>	F-статистика	t-статистика c <sub>0</sub>	t-статистика c <sub>1</sub>
$f_1(t)$	0,953	0,907	898,541	-10,514	29,976
$f_2(t)$	0,988	0,976	893,163	-22,574	29,886

Рассмотрим временной ряд  $\{y_t\} = \{x_t - f(t)\}$ . Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных:  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя  $y_t$  от лага в 1 и 8 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,924. Это означает, что значения M2 1 и 8 месяцев назад определяют сегодняшнее значение M2 на 92,4%. Таким образом, модель прогнозирования инфляции имеет вид :

$$\tilde{x}_t = f_2(t) + \sum_{y \in Y} y p(y | y_{t-1}, y_{t-8}).$$

На *рис. 6.3.17* приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации почти полностью совпадают между собой. Среднее абсолютное отклонение (MAPE) имитационных значений от истинных составляет 0,51%.

Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период 08.2000 – 11.2001. Построены три последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-1}, y_{t-8})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и два с обучением (в обоих случаях на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-1}, y_{t-8})$  уточняется за счет добавления новой точки, но в первом используется один и тот же тренд, а во втором тренд корректируется на каждом шаге). В *табл. 6.3.14* и на *рис. 6.3.18* приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. При этом для случая прогноза с обучением и коррекцией тренда коэффициенты функции  $f_2$  меняются от шага к шагу. Соответствующие коэффициенты приведены в *табл. 6.3.15*. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 6,20%, а с обучением – 2,47% без коррекции тренда и 1,84% – с коррекцией.



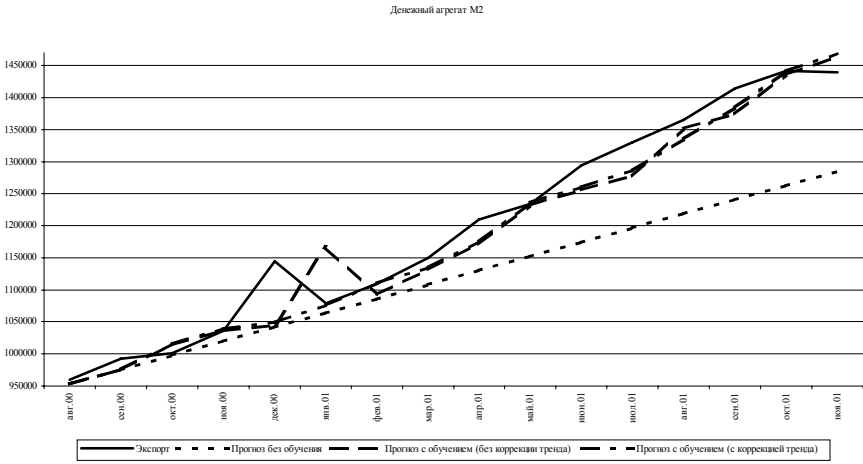


Рис. 6.3.17. Имитация

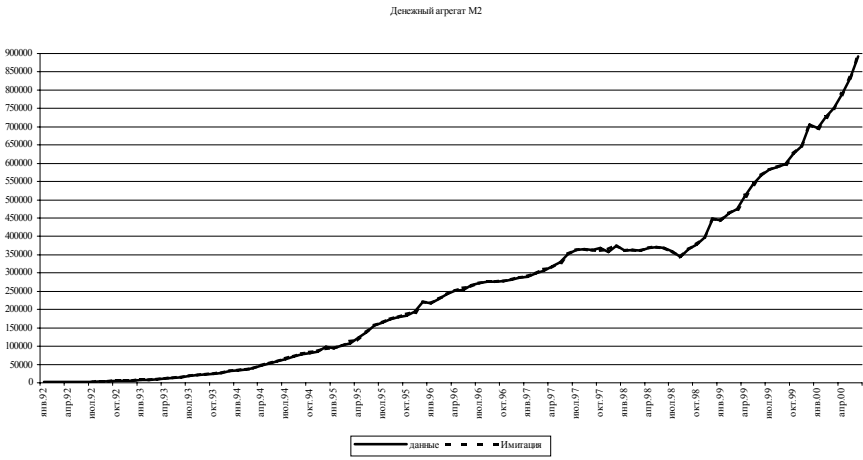


Рис. 6.3.18. Прогноз

Таблица 6.3.14

Трендовый прогноз М2

Дата	М2	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением (без коррекции тренда)		Прогноз с обучением (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошибка	результат	ошибка
авг 00	960100	953310,0	0,71	953310,0	0,71	953310,0	0,71
сен 00	992400	975420,1	1,71	975420,1	1,71	976656,0	1,59
окт 00	1001200	997530,1	0,37	1014510,0	1,33	1015716,3	1,45
ноя 00	1036400	1019640,1	1,62	1036620,1	0,02	1039880,1	0,34
дек 00	1144300	1041750,2	8,96	1045420,1	8,64	1049511,2	8,28
январь 01	1079300	1063860,2	1,43	1166410,0	8,07	1075650,3	0,34
фев 01	1109700	1085970,3	2,14	1092760,2	1,53	1110230,2	0,05
мар 01	1149500	1108080,3	3,60	1131810,0	1,54	1134921,7	1,27
апр 01	1210000	1130190,3	6,60	1171610,0	3,17	1174965,8	2,90
май 01	1233700	1152300,4	6,60	1232110,0	0,13	1235826,1	0,17
июнь 01	1294300	1174410,4	9,26	1255810,0	2,97	1259826,9	2,66
июль 01	1330200	1196520,4	10,05	1277920,1	3,93	1286713,9	3,27
авг 01	1365500	1218630,5	10,76	1352310,0	0,97	1335690,2	2,18
сен 01	1414400	1240740,5	12,28	1374420,1	2,83	1384629,6	2,10
окт 01	1441200	1262850,6	12,38	1436510,0	0,33	1441979,4	0,05
ноя 01	1439100	1284960,6	10,71	1463310,0	1,68	1469101,0	2,08
Средняя ошибка прогноза			6,20		2,47		1,84

Таблица 6.3.15

$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$
117	-498483,752	6869,279	121	-589828,211	7773,412
118	-532312,207	7205,323	122	-638019,335	8245,874
119	-560816,089	7487,540	123	-646040,710	8324,259
120	-576472,511	7642,044	124	-652322,303	8385,443

Таблица 6.3.15 (продолжение)

$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$
125	-659299,727	8453,185	129	-745936,517	9287,212
126	-680298,565	8656,399	130	-770499,627	9521,892
127	-694883,545	8797,091	131	-797546,854	9779,485
128	-720806,658	9046,351	132	-816958,807	9963,775

Рассмотрим теперь вероятностную модель прогнозирования. Поскольку в исходных данных явно содержится детерминированный тренд, то преобразуем их в темповые характеристики, т.е. введем новый ряд:

$y_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}, t = 1, \dots, T$ . График соответствующего временного ряда также приведен на *рис. 6.3.16*.

Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных: показатель темпа роста  $M2$  и его лаговые значения до 12 месяцев, т.е. для системы  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя темпа роста  $M2$  от лага в 6 и 9 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,940. Это означает, что значения темпов роста  $M2$  6 и 9 месяцев назад определяют сегодняшний темп роста на 94,0%. Таким образом, модель прогнозирования безработицы в данном случае имеет вид:

$$\tilde{x}_t = x_{t-1} \sum_{y \in Y} yp(y|y_{t-6}, y_{t-9}).$$

На *рис. 6.3.19* приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации на временном интервале 01.1992 – 07.2000 в этом случае практически полностью совпадают: среднее расхождение (MAPE) между исходными данными и их имитацией составляет 0,11%.

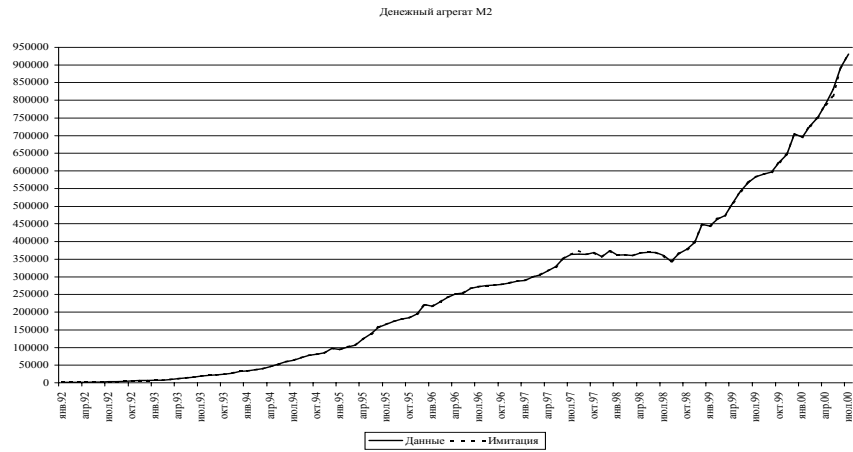


Рис. 6.3.19. Имитация

Для проверки качества прогнозирования, как и выше, использованы данные за период 08.2000 – 11.2001. Построено две последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-6}, y_{t-9})$ ), построенное на первоначальных исходных данных) и с обучением (на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-6}, y_{t-9})$  уточняется за счет добавления новой точки). В табл. 6.3.16 и на рис. 6.3.20 приведены результаты одношагового прогнозирования по приведенной модели. В этом случае результаты прогнозирования с обучением и без совпадают между собой. Средняя ошибка прогноза (MAPE) составляет 4,96%.

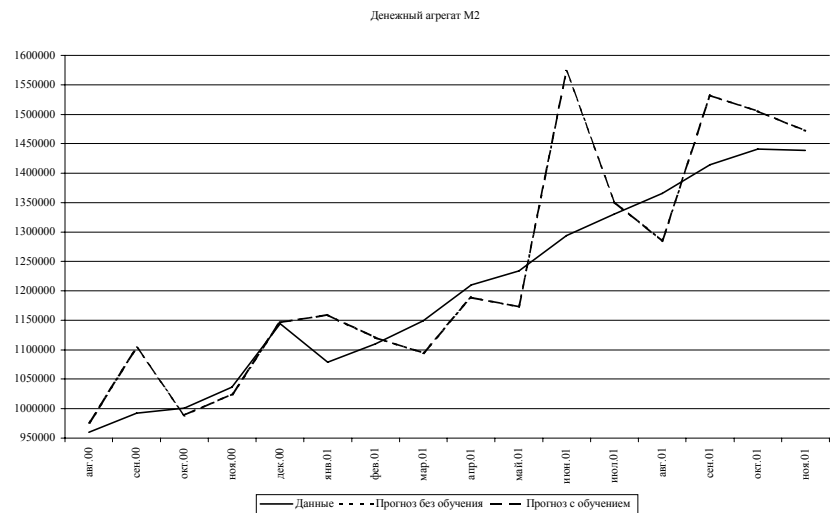


Рис. 6.3.20. Прогноз

Таблица 6.3.16

Вероятностный прогноз М2

Дата	М2	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	Ошибка
авг.00	960100	976434,0	1,70	976434,0	1,70
сен.00	992400	1102370,2	11,08	1102370,2	11,08
окт.00	1001200	988645,0	1,25	988645,0	1,25
ноя.00	1036400	1024720,0	1,13	1024720,0	1,13
дек.00	1144300	1146105,5	0,16	1146105,5	0,16

Таблица 6.3.16 (продолжение)

Дата	M2	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	Ошибка
январь.01	1079300	1159212,0	7,40	1159212,0	7,40
февраль.01	1109700	1120365,2	0,96	1120365,2	0,96
март.01	1149500	1094425,3	4,79	1094425,3	4,79
апрель.01	1210000	1188734,2	1,76	1188734,2	1,76
май.01	1233700	1172597,6	4,95	1172597,6	4,95
июнь.01	1294300	1573512,6	21,57	1573512,6	21,57
июль.01	1330200	1351701,4	1,62	1351701,4	1,62
август.01	1365500	1284331,0	5,94	1284331,0	5,94
сентябрь.01	1414400	1531754,1	8,30	1531754,1	8,30
октябрь.01	1441200	1505436,7	4,46	1505436,7	4,46
ноябрь.01	1439100	1471591,6	2,26	1471591,6	2,26
Средняя ошибка прогноза			4,96		4,96

6.3.3. Динамика внешнеторговых характеристик

6.3.3.1. Экспорт

В качестве исходных данных для построения модели прогнозирования экспорта используются месячные данные за период 01.1994 – 04.2000. Данные за период 05.2000 – 12.2001 используются для проверки построенных в разделе моделей прогнозирования. График этих данных приведен на рис. 6.3.21.

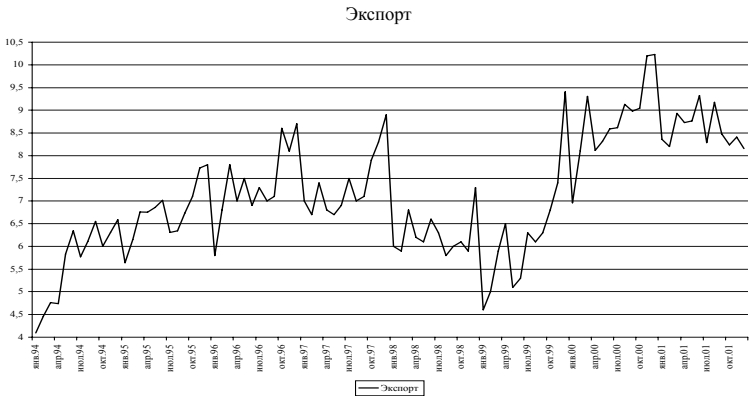


Рис. 6.3.21. Исходные данные

В соответствии с проведенным ранее исследованием ряд экспорта представляет собой стационарный относительно тренда ряд. Построим детерминированный линейный тренд ряда на временном промежутке 01.1994 – 04.2000. Получаем

$$f(t) = 6,194 + 0,013t.$$

Статистические характеристики построенного тренда приведены в табл. 6.3.17.

Таблица 6.3.17

Тренд	R	Нормированный R <sup>2</sup>	F-статистика	Значимость F	t-статистика c <sub>0</sub>	t-статистика c <sub>1</sub>
$f(t)$	0,260	0,055	5,379	0,023	25,666	2,319

Рассмотрим временной ряд  $\{y_t\} = \{x_t - f(t)\}$ . Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных:  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя  $y_t$  от лага в 1 и 12 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,874. Это означает, что значения экспорта 1 и 12 месяцев назад определяют сегодняшний экспорт на 87,4%. Таким образом, модель прогнозирования инфляции имеет вид :

$$\tilde{x}_t = f(t) + \sum_{y \in Y} yp(y|y_{t-1}, y_{t-12}).$$

На рис. 6.3.19 приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации за период 01.1995 – 04.2000 полностью совпадают между собой.

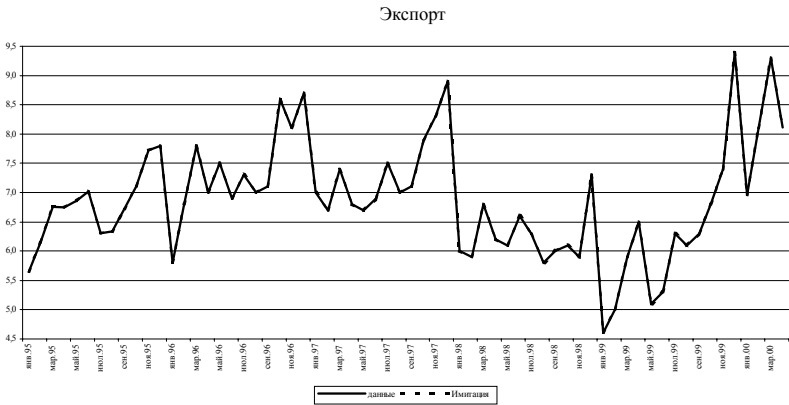


Рис. 6.3.22. Имитация

Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период 05.2000 – 12.2001. Построены три последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-1}, y_{t-12})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и два с обучением (в обоих случаях на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-1}, y_{t-12})$  уточняется за счет добавления новой точки, но в одном используется один и тот же тренд, а во втором тренд корректируется на каждом шаге). В *табл. 6.3.18* и на *рис. 6.3.23* приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. При этом для случая прогноза с обучением и коррекцией тренда коэффициенты функции  $f$  меняются от шага к шагу. Соответствующие коэффициенты приведены в *табл. 6.3.19*. Средняя ошибка прогноза (МАРЕ) без обучения составляет 11,24%, а с обучением – 9,06% без коррекции тренда и 7,06% – с коррекцией.

Рассмотрим теперь вероятностную модель прогнозирования. Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных: показатель инфляции и лаговые значения до 12 месяцев. Получаем зависимость показателя экспорта от лага в 1 и 8 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,836. Это означает, что значения экспорта 1 и 8 месяцев назад определяют сегодняшнюю инфляцию на 83,6%. Таким образом, модель прогнозирования инфляции имеет вид:

$$\tilde{x}_t = \sum_{x \in X} xp(x | x_{t-1}, x_{t-8}).$$

На *рис. 6.3.24* приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации полностью совпадают между собой на временном интервале 01.1995 – 04.2000 (так же, как и в случае имитации с трендом).

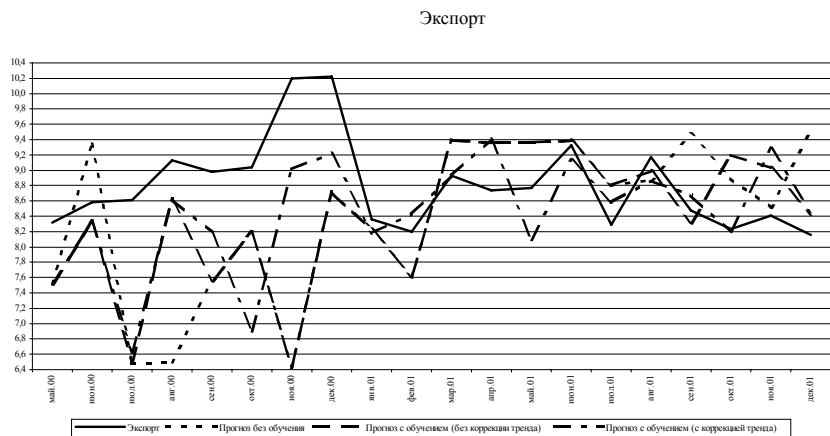


Рис. 6.3.23. Прогноз

Таблица 6.3.18

Трендовый прогноз экспорта							
Дата	Экс- порт	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением (без коррекции тренда)		Прогноз с обучением (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошибка	результат	ошибка
май.00	8,32	7,52	9,55	7,52	9,55	7,52	9,55
июн.00	8,58	9,34	8,78	8,33	2,99	8,33	2,97
июл.00	8,61	6,48	24,73	6,48	24,73	6,61	23,19
авг.00	9,13	6,49	28,89	8,62	5,57	8,63	5,53
сен.00	8,98	7,56	15,89	7,56	15,89	8,20	8,72
окт.00	9,04	8,19	9,47	8,19	9,47	6,90	23,72
ноя.00	10,20	6,43	36,94	6,43	36,94	9,01	11,62
дек.00	10,23	8,72	14,74	8,72	14,74	9,21	9,92
янв.01	8,35	8,22	1,56	8,22	1,56	8,19	2,02
фев.01	8,20	7,61	7,22	7,61	7,22	8,43	2,77
мар.01	8,93	9,39	5,22	9,39	5,22	8,93	0,06
апр.01	8,73	9,36	7,16	9,36	7,16	9,41	7,78
май.01	8,77	9,37	6,88	9,37	6,88	8,09	7,70
июн.01	9,33	9,38	0,61	9,38	0,61	9,13	2,04
июл.01	8,29	8,81	6,28	8,81	6,28	8,58	3,59
авг.01	9,18	8,87	3,35	8,99	2,03	8,86	3,41
сен.01	8,48	9,47	11,70	8,31	1,94	8,68	2,36
окт.01	8,23	8,89	8,03	9,20	11,76	8,20	0,42
ноя.01	8,41	8,52	1,30	9,03	7,35	9,28	10,34
дек.01	8,16	9,51	16,56	8,42	3,27	8,44	3,46
Средняя ошибка прогноза		11,24		9,06		7,06	



$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$
77	6,194	0,013	82	6,018	0,019	87	5,851	0,025	92	5,778	0,028
78	6,164	0,014	83	5,982	0,021	88	5,831	0,026	93	5,760	0,028
79	6,130	0,015	84	5,922	0,023	89	5,816	0,026	94	5,758	0,028
80	6,097	0,016	85	5,865	0,025	90	5,803	0,028	95	5,762	0,028
81	6,054	0,018	86	5,855	0,025	91	5,778	0,028	96	5,762	0,028

Таблица 6.3.19

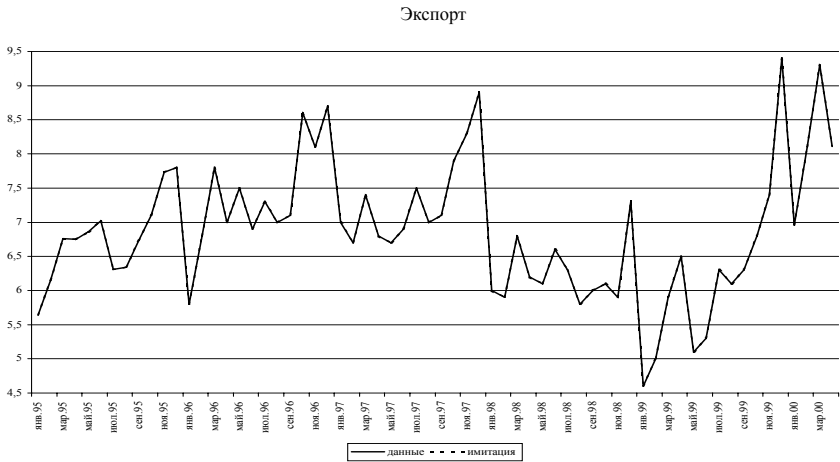


Рис. 6.3.24. Имитация  
Экспорт

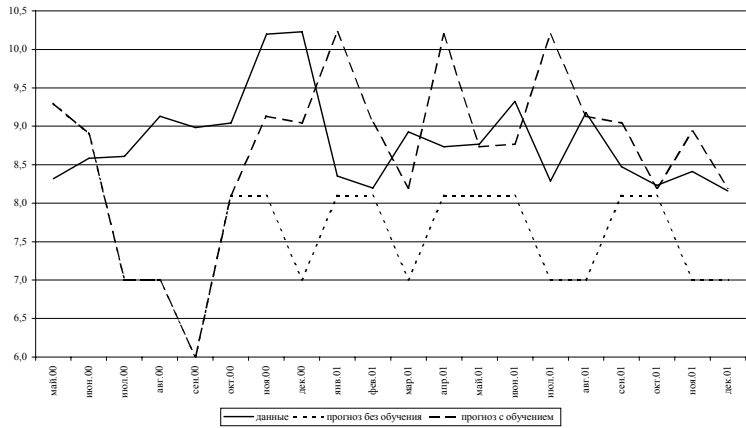


Рис. 6.3.25. Прогноз

Для проверки качества прогнозирования по модели без тренда использованы данные за период 05.2000 – 12.2001. Построены две последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(x_t | x_{t-1}, x_{t-8})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и с обучением (на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(x_t | x_{t-1}, x_{t-8})$  уточняется за счет добавления новой точки). В табл. 6.3.20 и на рис. 6.3.25 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 14,17%, а с обучением 11,22%.

Таблица 6.3.20

Вероятностный прогноз экспорта

Дата	Экспорт	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	ошибка
май.00	8,3	9,30	11,85	9,30	11,85
июн.00	8,6	8,90	3,68	8,90	3,68
июл.00	8,6	7,00	18,72	7,00	18,72
авг.00	9,1	7,00	23,35	7,00	23,35
сен.00	9,0	6,00	33,21	6,00	33,21
окт.00	9,0	8,10	10,42	8,10	10,42
ноя.00	10,2	8,10	20,56	9,13	10,43
дек.00	10,2	7,00	31,55	9,04	11,58
янв.01	8,4	8,10	3,04	10,23	22,41
фев.01	8,2	8,10	1,21	9,04	10,28
мар.01	8,9	7,00	21,59	8,20	8,16
апр.01	8,7	8,10	7,24	10,20	16,77
май.01	8,8	8,10	7,60	8,73	0,39
июн.01	9,3	8,10	13,14	8,77	5,99
июл.01	8,3	7,00	15,53	10,20	23,04
авг.01	9,2	7,00	23,71	9,13	0,47
сен.01	8,5	8,10	4,45	9,04	6,67
окт.01	8,2	8,10	1,62	8,20	0,41
ноя.01	8,4	7,00	16,77	8,93	6,15
дек.01	8,2	7,00	14,17	8,20	0,53
Средняя ошибка прогноза			14,17		11,22

6.3.3.2. Импорт

В качестве исходных данных для построения модели прогнозирования экспорта используются месячные данные за период 01.1994 – 04.2000. Данные за период 05.2000 – 12.2001 используются для проверки построенных в разделе моделей прогнозирования. График этих данных приведен на *рис. 6.3.26*.

В соответствии с проведенным ранее исследованием ряда импорта он стационарен относительно линейного тренда на временном интервале 01.1994 – 04.1998. Разобьем весь интервал наблюдений на 2 подинтервала: 01.1994 – 08.1998; 09.1998 – 04.2000. Для каждого из этих интервалов построим детерминированный линейный тренд. Получаем

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t)=4,078+0,046t, & t=1,...,56; \\ f_2(t)=1,950+0,021t, & t=57,...,76. \end{cases}$$

Статистические характеристики построенных трендов приведены в *табл. 6.3.21*.

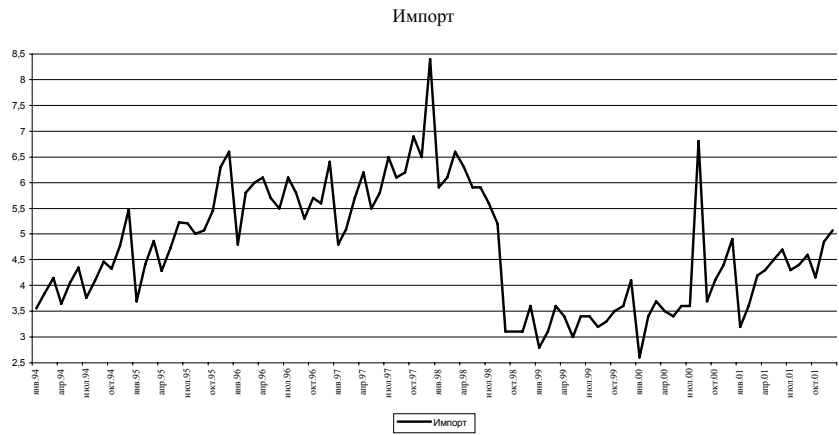


Рис. 6.3.26. Исходные данные

Таблица 6.3.21

Тренд	R	Нормированный R	F-статистика	Значимость F	t-статистика c0	t-статистика c1
$f_1(t)$	0,769	0,583	78,133	0,000	24,074	8,839
$f_2(t)$	0,361	0,082	2,703	0,118	2,323	1,644

Рассмотрим временной ряд  $\{y_t\} = \{x_t - f(t)\}$ . Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных:  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя  $y_t$  от лага в 6 и 12 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,803. Это означает, что значения инфляции 6 и 12 месяцев назад определяют сегодняшнюю инфляцию на 80,3%. Таким образом, модель прогнозирования инфляции имеет вид:

$$\tilde{x}_t = f_2(t) + \sum_{y \in Y} y p(y | y_{t-1}, y_{t-5}).$$

На *рис. 6.3.27* приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации полностью совпадают между собой (так же как и при имитации экспорта).

Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период 05.2000 – 12.2001. Построены три последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-1}, y_{t-5})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и два с обучением (в обоих случаях на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-1}, y_{t-5})$  уточняется за счет добавления новой точки, но в одном используется один и тот же тренд, а во втором тренд корректируется на каждом шаге). В *табл. 6.3.21* и на *рис. 6.3.28* приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. При этом для случая прогноза с обучением и коррекцией тренда коэффициенты функции  $f_2$  меняются от шага к шагу. Соответствующие коэффициенты приведены в *табл. 6.3.22*. Средняя ошибка прогноза (МАРЕ) без обучения составляет 11,28%, а с обучением – 9,79% без коррекции тренда и 13,32% – с коррекцией. В данном случае (в отличие от предыдущих) прогноз с обучением и коррекцией тренда является худшим, а не лучшим. Это обусловлено всплеском объема импорта в августе 2000 г.

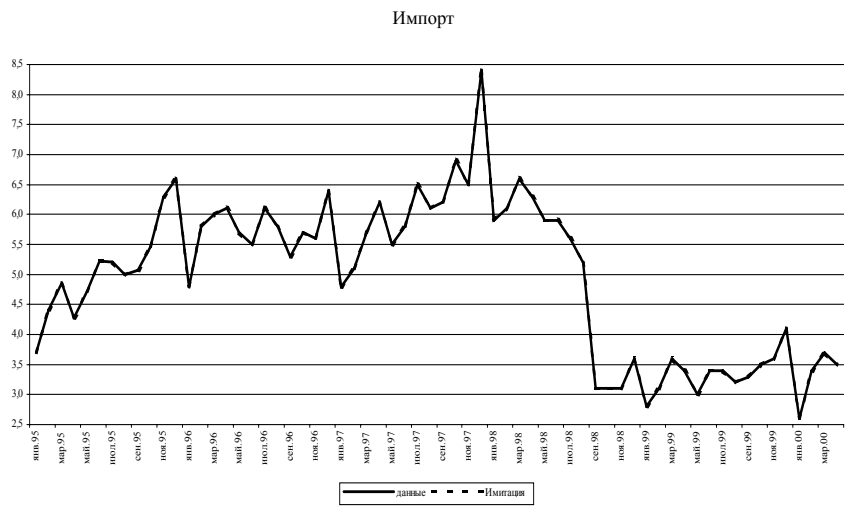


Рис. 6.3.27. Имитация

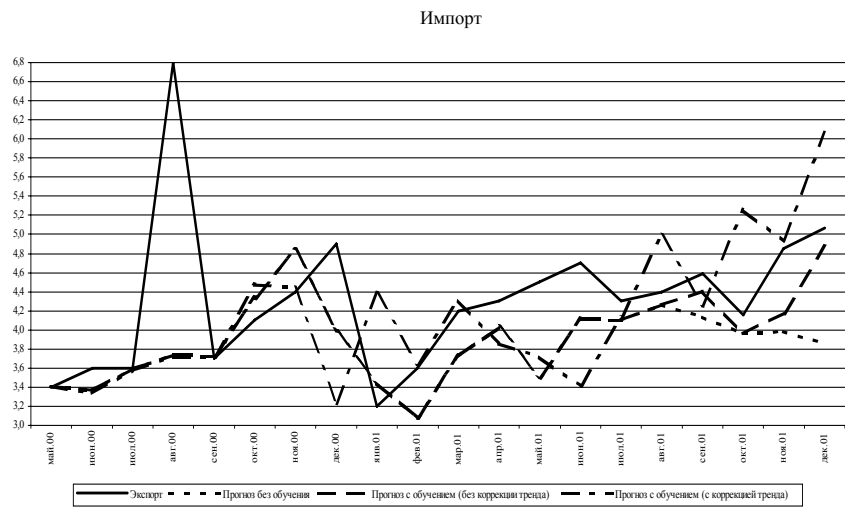


Рис. 6.3.28. Прогноз

Таблица 6.3.22

Трендовый прогноз импорта

Дата	Импорт	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением (без коррекции тренда)		Прогноз с обучением (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошибка	результат	ошибка
Май.00	3,40	3,41	0,21	3,41	0,21	3,41	0,21
Июн.00	3,60	3,37	6,52	3,37	6,52	3,34	7,27
Июл.00	3,60	3,59	0,15	3,59	0,15	3,58	0,63
Авг.00	6,80	3,73	45,13	3,73	45,13	3,72	45,30
Сен.00	3,70	3,73	0,74	3,73	0,74	3,72	0,53
Окт.00	4,10	4,33	5,70	4,33	5,70	4,47	9,08
Ноя.00	4,40	4,84	9,93	4,84	9,93	4,45	1,11
Дек.00	4,90	3,98	18,76	3,98	18,76	3,23	34,15
Янв.01	3,20	3,44	7,64	3,44	7,64	4,38	36,79
Фев.01	3,60	3,08	14,38	3,08	14,38	3,64	1,06
Мар.01	4,20	3,73	11,25	3,73	11,25	4,31	2,58
Апр.01	4,30	4,03	6,30	4,03	6,30	3,86	10,34
Май.01	4,50	3,50	22,13	3,50	22,13	3,72	17,34
Июн.01	4,70	4,11	12,61	4,11	12,61	3,41	27,35
Июл.01	4,30	4,11	4,52	4,11	4,52	4,12	4,11
Авг.01	4,40	4,26	3,14	4,26	3,14	4,99	13,33
Сен.01	4,59	4,13	10,01	4,40	4,11	4,26	7,29
Окт.01	4,16	3,96	4,65	3,96	4,65	5,26	26,61
Ноя.01	4,85	3,98	17,91	4,18	13,92	4,93	1,62
Дек.01	5,07	3,86	23,92	4,87	3,91	6,07	19,67
Средняя ошибка прогноза			11,28		9,79		13,32

Таблица 6.3.23

$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$
77	1,950	0,021	82	0,197	0,048	87	0,616	0,042	92	0,502	0,043
78	2,067	0,019	83	0,212	0,048	88	0,631	0,041	93	0,529	0,043
79	2,018	0,020	84	0,093	0,050	89	0,622	0,042	94	0,509	0,043
80	1,995	0,020	85	-0,221	0,054	90	0,557	0,043	95	0,625	0,042
81	-0,069	0,052	86	0,323	0,046	91	0,449	0,044	96	0,551	0,043

Рассмотрим теперь вероятностную модель прогнозирования. Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных: показатель объема импорта и лаговые значения этого показателя до 12 месяцев, т.е. для системы  $\{x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя инфляции от лага в 9 и 11 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,867. Это означает, что значения объема импорта 9 и 11 месяцев назад определяют сегодняшний объем импорта на 86,7%. Таким образом, модель без тренда для прогнозирования импорта в данном случае имеет вид:

$$\tilde{x}_t = \sum_{x \in X} xp(x|x_{t-9}, x_{t-11}).$$

На *рис. 6.3.29* приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации близки между собой. Средняя относительная ошибка (MAPE) имитации за период 01.1995 – 04.2000 составляет 0,54%.

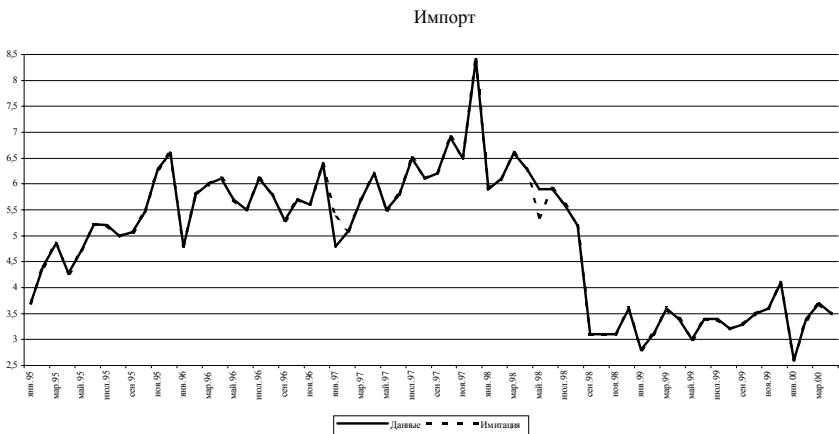


Рис. 6.3.29. Имитация



Рис. 6.3.30. Прогноз

Для проверки качества прогнозирования, как и выше, использованы данные за период 05.2000 – 12.2001. Построено две последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(x_t | x_{t-1}, x_{t-12})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и с обучением (на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(x_t | x_{t-1}, x_{t-12})$  уточняется за счет добавления новой точки). В табл. 6.3.24 и на рис. 6.3.30 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения в этом случае составляет 20,60%, а с обучением 16,09%. Таким образом, в данном случае прогнозные свойства модели оказались крайне плохими.

Таблица 6.3.24

Вероятностный прогноз импорта

Дата	Импорт	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	ошибка
май.00	3,4	3,70	8,82	3,70	8,82
июн.00	3,6	3,70	2,78	3,55	1,39
июл.00	3,6	2,95	18,06	2,95	18,06
авг.00	6,8	3,30	51,47	3,60	47,06
сен.00	3,7	5,48	48,11	5,48	48,11



Таблица 6.3.24 (продолжение)

Дата	Импорт	Прогноз без обучения	Прогноз с обучением	3,40	17,07
		результат	ошибка	результат	ошибка
дек.00	4,9	4,10	16,33	4,10	16,33
янв.01	3,2	3,70	15,63	3,70	15,63
фев.01	3,6	3,70	2,78	3,70	2,78
мар.01	4,2	3,70	11,90	3,20	23,81
апр.01	4,3	3,70	13,95	4,73	10,08
май.01	4,5	6,40	42,22	6,40	42,22
июн.01	4,7	3,70	21,28	4,20	10,64
июл.01	4,3	5,70	32,56	5,70	32,56
авг.01	4,4	4,86	10,45	4,86	10,45
сен.01	4,6	6,00	30,66	6,00	30,66
окт.01	4,2	5,46	31,41	4,40	5,90
ноя.01	4,9	5,46	12,55	5,46	12,55
дек.01	5,1	5,48	8,09	3,70	27,02
Средняя ошибка прогноза			20,60		16,09

6.3.4. Безработица

В качестве исходных данных для построения модели прогнозирования безработицы используются месячные данные за период 01.1994 – 08.2000. Данные за период 09.2000 – 12.2001 используются для проверки построенных в разделе моделей прогнозирования. График этих данных приведен на рис. 6.3.31.

В соответствии с проведенным ранее исследованием ряда безработицы на временном интервале 01.1994 – 04.1998 данный ряд является стационарным относительно линейного тренда. Разобьем весь интервал наблюдений на 2 подинтервала: 01.1994 – 08.1998 и 09.1998 – 08.2000. Для каждого из этих интервалов построим детерминированный линейный тренд. Получаем

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t)=5,051+0,064t, & t=1,...,56; \\ f_2(t)=15,749-0,102t, & t=57,...,80. \end{cases}$$

Статистические характеристики построенных трендов приведены в табл. 6.3.25.



Рис. 6.3.31. Исходные данные

Таблица 6.3.25

Тренд	R	Нормированный R <sup>2</sup>	F-статистика	Значимость F	t-статистика c <sub>0</sub>	t-статистика c <sub>1</sub>
$f_1(t)$	0,989	0,978	2435,141	0,000	119,237	49,347
$f_2(t)$	0,800	0,623	38,987	0,000	13,979	-6,244

Рассмотрим временной ряд  $\{y_t\} = \{x_t - f(t)\}$ . Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных:  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя  $y_t$  от лага в 1 и 12 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,876. Это означает, что значения инфляции 1 и 12 месяцев назад определяют сегодняшнюю инфляцию на 87,6%. Таким образом, модель прогнозирования инфляции имеет вид:

$$\tilde{x}_t = f_2(t) + \sum_{y \in Y} yp(y|y_{t-1}, y_{t-12}).$$

На рис. 6.3.32 приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из рисунка, графики исходных данных и имитации практически совпадают между собой. Средняя относительная ошибка (MAPE) имитации за период 01.1995–08.2000 составляет 0,02%.

Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период 09.2000 – 12.2001. Построены три последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятнос-

тей  $p(y_t|y_{t-1}, y_{t-12})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и два с обучением (в обоих случаях на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t|y_{t-1}, y_{t-12})$  уточняется за счет добавления новой точки, но в одном используется один и тот же тренд, а во втором тренд корректируется на каждом шаге). В табл. 6.3.26 и на рис. 6.3.33 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. При этом для случая прогноза с обучением и коррекцией тренда коэффициенты функции  $f_2$  меняются от шага к шагу. Соответствующие коэффициенты приведены в табл. 6.3.27. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 3,26%, а с обучением 3,67% без коррекции тренда и 4,01% – с коррекцией.

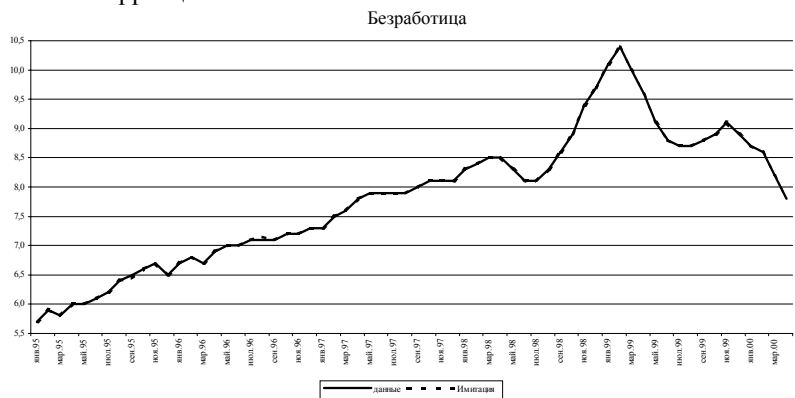


Рис. 6.3.32. Имитация

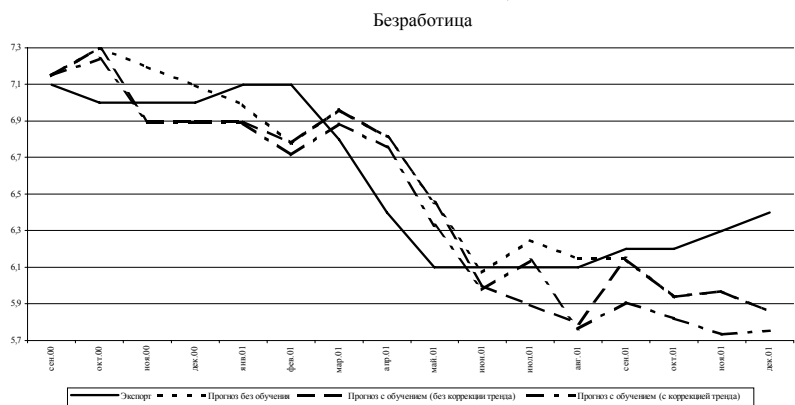


Рис. 6.3.33. Прогноз

Рассмотрим теперь построение вероятностной модели прогнозирования. В этом случае исходные данные считаются реализациями некоторой случайной величины. Поскольку в исходных данных явно содержится линейный тренд, то преобразуем их в темповые характеристики, т.е. введем новый ряд:  $y_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}, t = 1, \dots, T$ . График соответствующего временного ряда также приведен на рис.6.3.31.

Таблица 6.3.26

Трендовый прогноз безработицы

Дата	Безработица	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением (без коррекции тренда)		Прогноз с обучением (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошибка	результат	ошибка
сен.00	7,10	7,15	0,68	7,15	0,68	7,15	0,68
окт.00	7,00	7,30	4,27	7,30	4,27	7,24	3,41
ноя.00	7,00	7,20	2,81	6,90	1,46	6,89	1,55
дек.00	7,00	7,09	1,35	6,90	1,46	6,89	1,56
янв.01	7,10	6,99	1,52	6,90	2,85	6,89	2,95
фев.01	7,10	6,78	4,53	6,78	4,53	6,72	5,41
мар.01	6,80	6,96	2,43	6,96	2,43	6,89	1,29
апр.01	6,40	6,81	6,43	6,81	6,43	6,75	5,53
май.01	6,10	6,45	5,77	6,45	5,77	6,33	3,72
июн.01	6,10	6,07	0,43	6,00	1,67	5,98	1,99
июл.01	6,10	6,25	2,42	5,90	3,35	6,14	0,62
авг.01	6,10	6,15	0,75	5,79	5,02	5,76	5,51
сен.01	6,20	6,15	0,88	6,15	0,88	5,91	4,71
окт.01	6,20	5,94	4,21	5,94	4,21	5,82	6,13
ноя.01	6,30	5,97	5,26	5,97	5,26	5,73	9,01
дек.01	6,40	5,86	8,47	5,86	8,47	5,76	10,07
Средняя ошибка прогноза			3,26		3,67		4,01

Таблица 6.3.27

t	c0	c1	t	c0	c1	t	c0	c1	t	c0	c1
81	15,749	-0,102	85	16,239	-0,110	89	16,117	-0,108	93	16,392	-0,112
82	15,971	-0,106	86	16,153	-0,108	90	16,267	-0,110	94	16,328	-0,111
83	16,144	-0,108	87	16,037	-0,107	91	16,355	-0,111	95	16,242	-0,110
84	16,226	-0,110	88	16,020	-0,106	92	16,394	-0,112	96	16,113	-0,108

Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных: показатель темпа роста безработицы и его лаговые значения до 12 месяцев, т.е. для системы  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя темпа роста безработицы от лага в 1 и 10 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,906. Это означает, что значения темпов роста безработицы 1 и 10 месяцев назад определяют сегодняшний темп роста на 90,6%. Таким образом, модель прогнозирования безработицы в данном случае имеет вид:

$$\tilde{x}_t = x_{t-1} \sum_{y \in Y} yp(y|y_{t-1}, y_{t-10}).$$

На рис. 6.3.34 приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации и в этом случае почти совпадают. Средняя относительная ошибка (MAPE) имитации за период 01.1995 – 08.2000 составляет 0,06%.

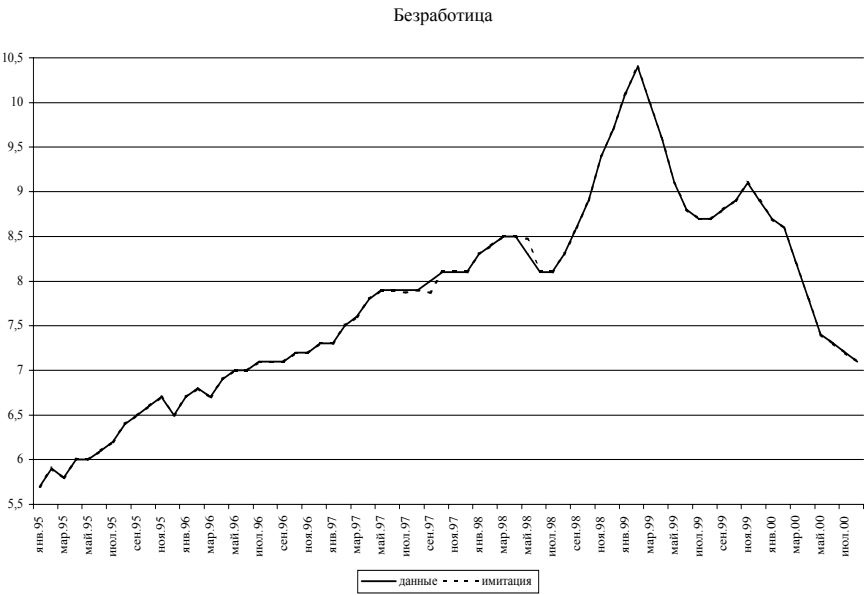


Рис. 6.3.34. Имитация

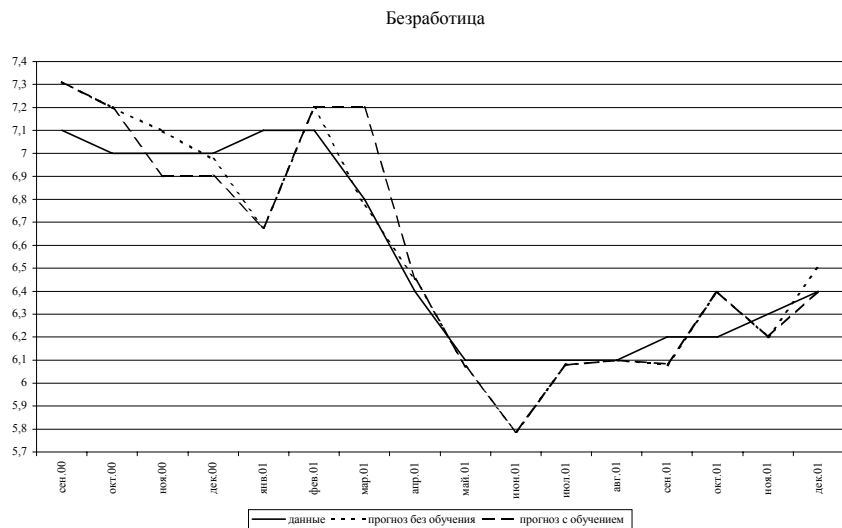


Рис. 6.3.35. Прогноз

Таблица 6.3.28

**Вероятностный прогноз безработицы**

Дата	Безработица	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	ошибка
сен.00	7,1	7,31	2,99	7,31	2,99
окт.00	7,0	7,20	2,86	7,20	2,86
ноя.00	7,0	7,10	1,41	6,90	1,41
дек.00	7,0	6,97	0,36	6,90	1,41
январ.01	7,1	6,67	5,99	6,67	5,99
февр.01	7,1	7,20	1,41	7,20	1,43
мар.01	6,8	6,77	0,44	7,20	5,90
апр.01	6,4	6,45	0,80	6,45	0,80
май.01	6,1	6,07	0,46	6,07	0,46
июн.01	6,1	5,79	5,13	5,79	5,13
июл.01	6,1	6,08	0,36	6,08	0,36
авг.01	6,1	6,10	0,00	6,10	0,00
сент.01	6,2	6,08	1,97	6,08	1,88
окт.01	6,2	6,40	3,23	6,40	3,23
ноя.01	6,3	6,20	1,59	6,20	1,59
дек.01	6,4	6,50	1,61	6,40	0,03
Средняя ошибка прогноза			1,91		2,22

Для проверки качества прогнозирования, как и выше, использованы данные за период 09.2000 – 12.2001. Построено две последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-1}, y_{t-10})$ ), построенное на первоначальных исходных данных) и с обучением (на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-1}, y_{t-10})$  уточняется за счет добавления новой точки). В табл. 6.3.28 и на рис. 6.3.35 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 1,91%, а с обучением – 2,22%.

### 6.3.5. Доходы федерального бюджета

#### 6.3.5.1. Налоговые доходы федерального бюджета

В качестве исходных данных для построения модели прогнозирования налоговых доходов федерального бюджета используются месячные данные за период 01.1992 – 05.2000. Данные за период 06.2000 – 12.2001 используются для проверки построенных в разделе моделей прогнозирования. График этих данных приведен на рис. 6.3.36.

В соответствии с проведенным ранее исследованием ряда налоговых доходов федерального бюджета он является стационарным в разностях на подпериоде 01.1996 – 05.2000. В то же время визуальный анализ графика ряда позволяет предположить наличие излома тренда во второй половине 1998 г. Разобьем весь интервал наблюдений на 2 подинтервала: 01.1992 – 08.1998 и 09.1998 – 05.2000. Для каждого из этих интервалов построим детерминированный линейный тренд. Получаем

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) = -2797,443 + 335,083t, & t = 1, \dots, 80; \\ f_2(t) = -246389,160 + 3215,930t, & t = 81, \dots, 101. \end{cases}$$

Статистические характеристики построенных трендов приведены в табл. 6.3.29.

Таблица 6.3.29

Тренд	R	Нормированный R <sup>2</sup>	F-статистика	Значимость F	t-статистика c <sub>0</sub>	t-статистика c <sub>1</sub>
$f_1(t)$	0,836	0,695	181,141	0,000	-2,410	13,459
$f_2(t)$	0,944	0,885	155,253	0,000	-10,467	12,460

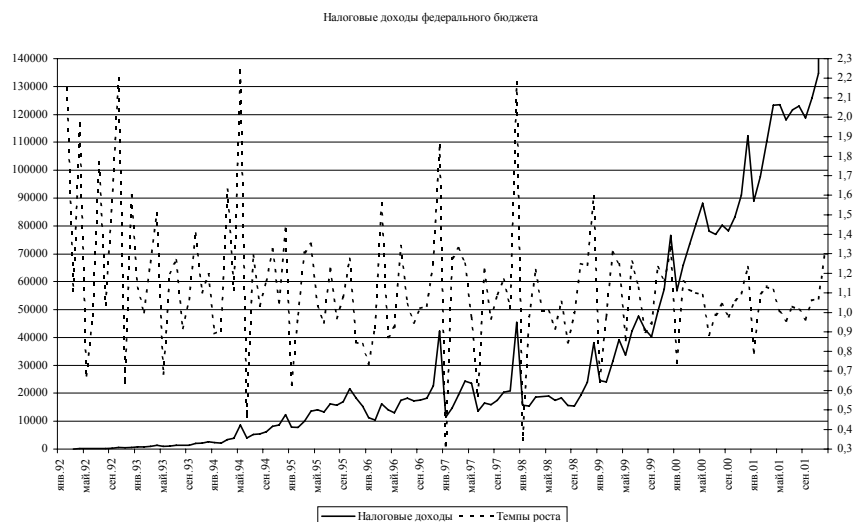


Рис. 6.3.36. Исходные данные

Рассмотрим временной ряд  $\{y_t\} = \{x_t - f(t)\}$ . Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных:  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя  $y_t$  от лага в 3 и 9 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,902. Это означает, что значения налоговых доходов 3 и 9 месяцев назад определяют сегодняшний объем налоговых доходов федерального бюджета на 90,2%. Таким образом, модель прогнозирования налоговых доходов федерального бюджета имеет вид:

$$\tilde{x}_t = f_2(t) + \sum_{y \in Y} yp(y|y_{t-3}, y_{t-9})$$

На рис. 6.3.37 приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации близки между собой. Средняя относительная ошибка (MAPE) имитации за период 01.1993–05.2000 составляет 0,60%.



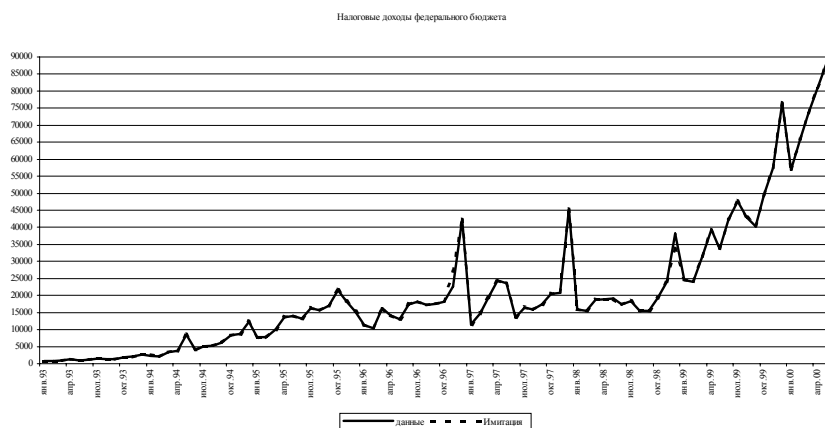


Рис. 6.3.37. Имитация

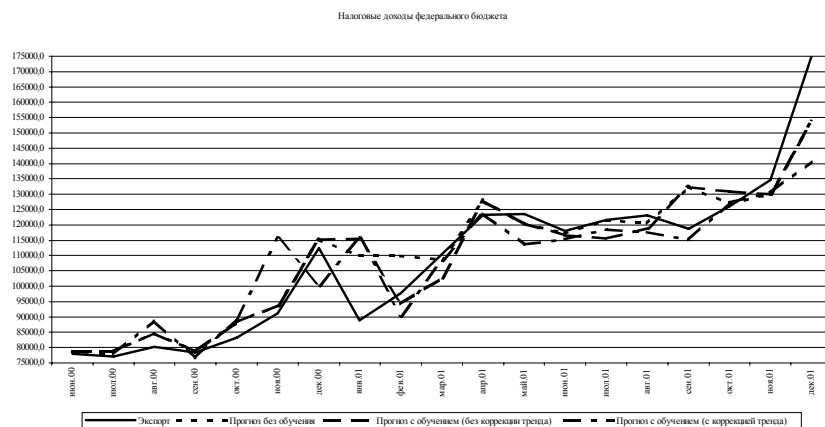


Рис. 6.3.38. Прогноз

Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период 06.2000 – 12.2001. Построены три последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-3}, y_{t-9})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и два с обучением (в обоих случаях на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-3}, y_{t-9})$  уточняется за счет добавления новой точки, но в

одном используется один и тот же тренд, а во втором тренд корректируется на каждом шаге). В *табл. 6.3.30* и на *рис. 6.3.38* приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. При этом для случая прогноза с обучением и коррекцией тренда коэффициенты функции  $f_2$  меняются от шага к шагу. Соответствующие коэффициенты приведены в *табл. 6.3.31*. Средняя ошибка прогноза (МАРЕ) без обучения составляет 5,03%, а с обучением – 5,70% без коррекции тренда и 7,59% – с коррекцией.

Таблица 6.3.30

Трендовый прогноз налоговых доходов федерального бюджета

Дата	Налоговые доходы федераль- ного бюд- жета	Прогноз без обуче- ния		Прогноз с обучени- ем (без коррекции тренда)		Прогноз с обучени- ем (с коррекцией тренда)	
		результат	ошиб- ка	результат	ошиб- ка	результат	ошиб- ка
Июн.00	78032,05	78715,21	0,88	78715,21	0,88	78715,21	0,88
Июл.00	77035,19	78730,34	2,20	78730,34	2,20	78003,91	1,26
Авг.00	80207,21	84756,66	5,67	84756,66	5,67	88946,79	10,90
Сен.00	78308,11	78830,00	0,67	78830,00	0,67	76673,11	2,09
Окт.00	83175,24	88255,55	6,11	88255,55	6,11	89374,90	7,45
Ноя.00	91118,25	93760,65	2,90	93760,65	2,90	115637,57	26,91
Дек.00	112423,64	115075,10	2,36	115075,10	2,36	100166,54	10,90
Янв.01	88911,28	109833,24	23,53	115639,57	30,06	115441,47	29,84
Фев.01	97636,17	109944,84	12,61	94387,76	3,33	90254,42	7,56
Мар.01	110422,92	108626,58	1,63	102718,72	6,98	108484,01	1,76
Апр.01	123290,04	127938,82	3,77	127938,82	3,77	123806,63	0,42
Май.01	123489,51	120405,86	2,50	120405,86	2,50	113735,39	7,90
Июн.01	118092,78	117306,37	0,67	116623,21	1,24	115297,26	2,37
Июл.01	121577,55	121490,30	0,07	115626,35	4,89	118564,95	2,48
Авг.01	123081,87	120537,43	2,07	118842,28	3,44	117572,77	4,48
Сен.01	118676,28	132456,35	11,61	132456,35	11,61	115040,88	3,06
Окт.01	125962,34	126846,71	0,70	130956,50	3,96	127365,83	1,11
Ноя.01	134743,06	130062,64	3,47	130062,64	3,47	130363,23	3,25
Дек.01	175067,74	153666,26	12,22	153666,26	12,22	140685,36	19,64
Средняя ошибка прогноза			5,03		5,70		7,59

Таблица 6.3.31

<i>t</i>	<i>c</i> <sub>0</sub>	<i>c</i> <sub>1</sub>	<i>t</i>	<i>c</i> <sub>0</sub>	<i>c</i> <sub>1</sub>
102	-246389,160	3215,930	107	-217493,796	2888,962
103	-242643,055	3173,199	108	-217134,418	2884,939
104	-235793,167	3095,359	109	-229050,348	3017,831
105	-230566,490	3036,189	110	-222233,993	2942,093
106	-222443,028	2944,571	111	-220042,628	2917,835

Таблица 6.3.31 (продолжение)

<i>t</i>	<i>c</i> <sub>0</sub>	<i>c</i> <sub>1</sub>	<i>t</i>	<i>c</i> <sub>0</sub>	<i>c</i> <sub>1</sub>
112	-223654,253	2957,669	117	-238159,189	3116,752
113	-231764,318	3046,790	188	-235064,999	3083,362
114	-237120,517	3105,435	119	-234007,240	3071,988
115	-237672,240	3111,454	120	-235150,126	3084,233
116	-238299,867	3118,276			

Рассмотрим теперь вероятностную модель прогнозирования. Поскольку в исходных данных явно содержится тренд, то преобразуем их в темповые характеристики, т.е. введем новый ряд:  $y_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}, t = 1, \dots, T$ . График соответствующего временного ряда также приведен на рис. 6.3.36.

Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных: показатель темпа роста налоговых доходов федерального бюджета и его лаговые значения до 12 месяцев, т.е. для системы  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя темпа роста налоговых доходов бюджета от лага в 4 и 11 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,914. Это означает, что значения темпов роста налоговых доходов 4 и 11 месяцев назад определяют сегодняшний темп роста на 91,4%. Таким образом, модель прогнозирования безработицы в данном случае имеет вид:

$$\tilde{x}_t = x_{t-1} \sum_{y \in Y} yp(y | y_{t-4}, y_{t-11}).$$

На рис. 6.3.39 приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели за период 01.1993 – 05.2000. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации в этом случае совпадают.

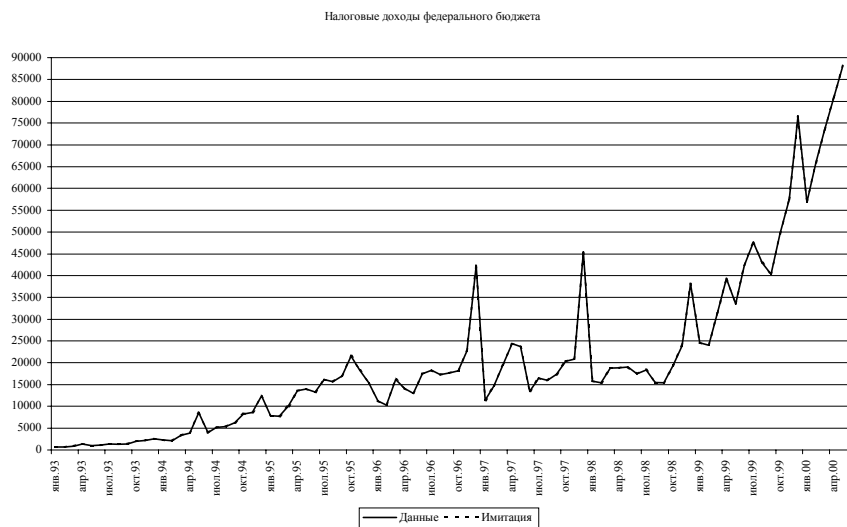


Рис. 6.3.39. Имитация

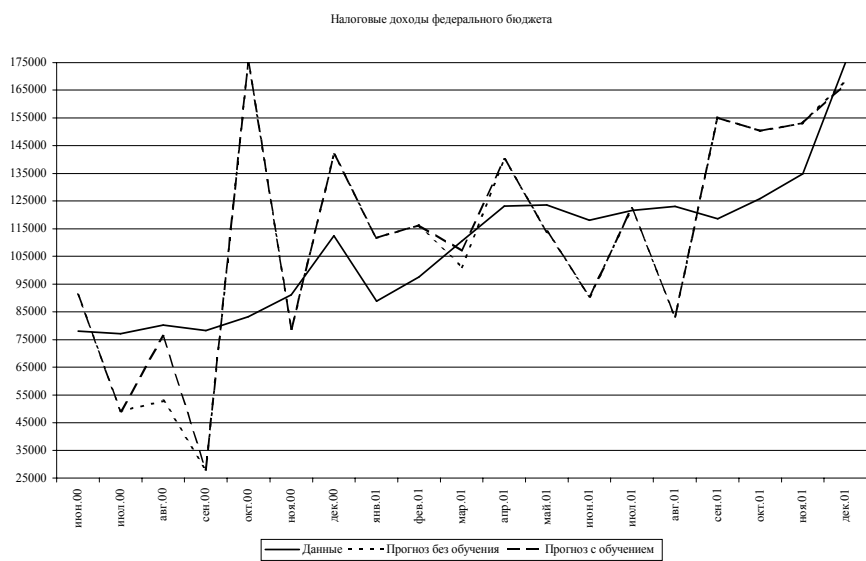


Рис. 6.3.40. Прогноз

Для проверки качества прогнозирования, как и выше, использованы данные за период 06.2000 – 12.2001. Построено две последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-4}, y_{t-11})$ ), построенное на первоначальных исходных данных) и с обучением (на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-4}, y_{t-11})$  уточняется за счет добавления новой точки). В табл. 6.3.32 и на рис. 6.3.40 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 26,35%, а с обучением – 24,56%.

Таблица 6.3.32

Вероятностный прогноз налоговых доходов федерального бюджета

Дата	Налоговые доходы федерального бюджета	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	ошибка
июн.00	78032,0	91210,0	16,89	91210,0	16,89
июл.00	77035,2	49169,8	36,17	49169,8	36,17
авг.00	80207,2	52731,8	34,26	76051,1	5,18
сен.00	78308,1	27936,7	64,32	27936,7	64,32
окт.00	83175,2	175701,8	111,24	175701,8	111,24
ноя.00	91118,3	78696,6	13,63	78696,6	13,63
дек.00	112423,6	141675,5	26,02	141675,5	26,02
янв.01	88911,3	111704,7	25,64	111704,7	25,64
фев.01	97636,2	116215,3	19,03	116215,3	19,03
мар.01	110422,9	101048,7	8,49	107217,2	2,90
апр.01	123290,0	139901,5	13,47	139901,5	13,47
май.01	123489,5	113849,5	7,81	113849,5	7,81
июн.01	118092,8	90623,8	23,26	90623,8	23,26
июл.01	121577,6	122220,3	0,53	122220,3	0,53
авг.01	123081,9	83221,7	32,39	83221,7	32,39
сен.01	118676,3	155141,6	30,73	155141,6	30,73
окт.01	125962,3	150399,6	19,40	150399,6	19,40
ноя.01	134743,1	153207,6	13,70	153207,6	13,70
дек.01	175067,7	168575,2	3,71	167412,1	4,37
Средняя ошибка прогноза			26,35		24,56

6.3.5.2. Доходы федерального бюджета

В качестве исходных данных для построения модели прогнозирования общих доходов федерального бюджета используются месячные данные за период 01.1992 – 05.2000. Данные за период 06.2000 – 12.2001 используются для проверки построенных в разделе моделей прогнозирования. График этих данных приведен на *рис. 6.3.41*.

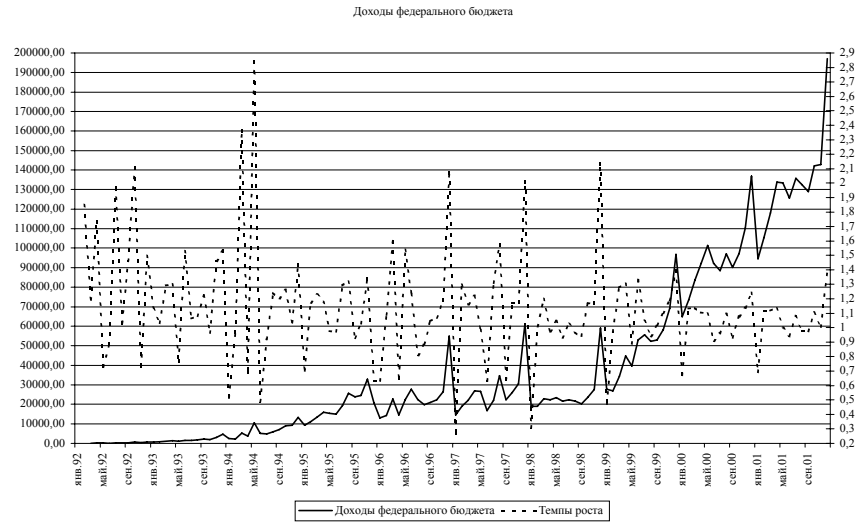


Рис. 6.3.41. Исходные данные

В соответствии с проведенным ранее исследованием ряда доходов федерального бюджета на подпериode 01.1996 – 05.2000 он является *DS*-рядом. В то же время визуальный анализ графика ряда позволяет предположить наличие излома тренда во второй половине 1998 г. Разобьем весь интервал наблюдений на 2 подинтервала: 01.1992 – 08.1998 и 09.1998 – 05.2000. Для каждого из этих интервалов построим детерминированный линейный тренд. Получаем

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t)=-3854,891+436,823t, & t=1,\dots,80; \\ f_2(t)=-246389,160+3215,930t, & t=81,\dots,101. \end{cases}$$

Статистические характеристики построенных трендов приведены в *табл. 6.3.33*.

Таблица 6.3.33

Тренд	R	Нормирован- ный R <sup>2</sup>	F-статистика	Значимость F	t-статистика c <sub>0</sub>	t-статистика c <sub>1</sub>
f <sub>1</sub> (t)	0,818	0,665	157,917	0,000	-2,379	12,567
f <sub>2</sub> (t)	0,906	0,810	86,526	0,000	-7,710	9,302

Рассмотрим временной ряд  $\{y_t\} = \{x_t - f(t)\}$ . Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных:  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя  $y_t$  от лага в 1 и 7 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,711. Это означает, что значения доходов федерального бюджета 1 и 7 месяцев назад определяют сегодняшний объем налоговых доходов федерального бюджета на 71,1%. Таким образом, модель прогнозирования инфляции имеет вид:

$$\tilde{x}_t = f_2(t) + \sum_{y \in Y} \gamma P(y | y_{t-1}, y_{t-7}).$$

На рис. 6.3.42 приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации не так близки между собой, как во всех предыдущих случаях. Средняя относительная ошибка (MAPE) имитации за период 01.1993–05.2000 составляет 6,23%.

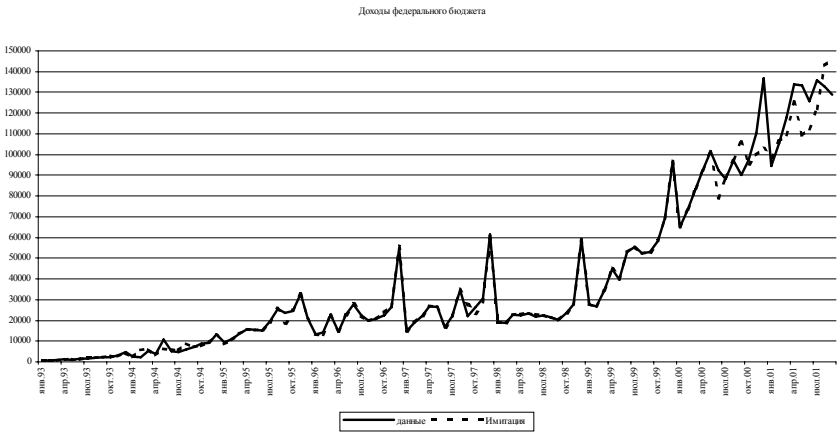


Рис. 6.3.42. Имитация

Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период 06.2000 – 12.2001. Построены три последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t|y_{t-1}, y_{t-7})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и два с обучением (в обоих случаях на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t|y_{t-1}, y_{t-7})$  уточняется за счет добавления новой точки, но в одном используется один и тот же тренд, а во втором тренд корректируется на каждом шаге). В табл. 6.3.34 и на рис. 6.3.43 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. При этом для случая прогноза с обучением и коррекцией тренда коэффициенты функции  $f_2$  меняются от шага к шагу. Соответствующие коэффициенты приведены в табл. 6.3.35. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 10,27%, а с обучением – 9,16% без коррекции тренда и 9,90% – с коррекцией.

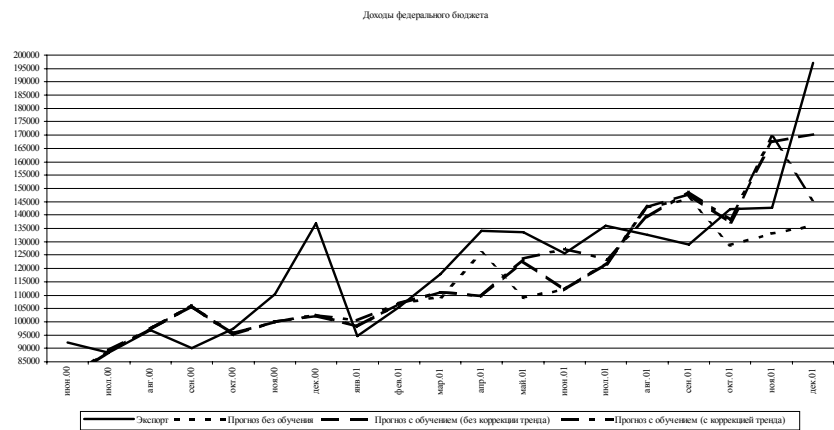


Рис. 6.3.43. Прогноз

Таблица 6.3.34

Трендовый прогноз доходов федерального бюджета

Дата	Доходы федерального бюджета	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением (без коррекции тренда)		Прогноз с обучением (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошибка	результат	ошибка
Июн.00	92225	78775,1	14,58	78775,1	14,58	78775,1	14,58
Июл.00	88387	88813,3	0,48	88813,3	0,48	89392,9	1,14



Таблица 6.3.34 (продолжение)

Дата	Доходы федерального бюджета	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением (без коррекции тренда)		Прогноз с обучением (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошибка	результат	ошибка
Авг.00	96925	97386,9	0,48	97386,9	0,48	97398,4	0,49
Сен.00	90147	106084,9	17,68	106084,9	17,68	106249,5	17,86
Окт.00	97210	95566,6	1,69	95566,6	1,69	95187,1	2,08
Ноя.00	110286	99903,3	9,41	99982,3	9,34	99918,3	9,40
Дек.00	136894	102675,7	25,00	102249,8	25,31	102287,5	25,28
Янв.01	94602	98182,4	3,78	98182,4	3,78	100417,3	6,15
Фев.01	105459	106656,6	1,14	106656,6	1,14	107051,1	1,51
Мар.01	117906	109429,0	7,19	111072,2	5,80	110978,2	5,88
Апр.01	133929	125492,2	6,30	109554,1	18,20	109589,9	18,17
Май.01	133450	109272,3	18,12	122722,0	8,04	123747,8	7,27
Июн.01	125606	112044,8	10,80	125494,5	0,09	127325,4	1,37
Июл.01	135925	122083,1	10,18	121657,1	10,50	123434,2	9,19
Авг.01	132578	143037,2	7,89	143037,2	7,89	139471,9	5,20
Сен.01	128974	145809,7	13,05	147791,0	14,59	148685,3	15,28
Окт.01	142335	128836,4	9,48	137313,5	3,53	138332,0	2,81
Ноя.01	142814	133173,0	6,75	167391,0	17,21	169191,3	18,47
Дек.01	197117	135945,4	31,03	170163,5	13,67	145755,5	26,06
Средняя ошибка прогноза			10,27		9,16		9,90

Таблица 6.3.35

$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$c_0$	$c_1$
102	-270413,670	3577,432	107	-241473,723	3250,102
103	-268064,691	3550,638	108	-244309,058	3281,840
104	-259203,816	3449,946	109	-262041,907	3479,605
105	-256849,456	3423,293	110	-247993,809	3323,515
106	-246659,941	3308,374	111	-240922,558	3245,235

$t$	$c_0$	$c_1$	$t$	$C_0$	$c_1$
112	-240159,029	3236,814	117	-245650,493	3297,443
113	-246138,409	3302,521	118	-241230,811	3249,749
114	-249266,028	3336,765	119	-241266,754	3250,135
115	-246715,101	3308,937	120	-240302,609	3239,805
116	-247640,641	3318,997			

Рассмотрим теперь вероятностную модель прогнозирования. Поскольку в исходных данных явно содержится тренд, то преобразуем их в темповые характеристики, т.е. введем новый ряд:  $y_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}, t = 1, \dots, T$ .

График соответствующего временного ряда также приведен на рис. 6.3.41. Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 13 переменных: показатель темпа роста доходов федерального бюджета и его лаговые значения до 12 месяцев, т.е. для системы  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-12}\}$ . Получаем зависимость показателя темпа роста доходов бюджета от лага в 5 и 8 месяцев с коэффициентом информативности, равным 0,873. Это означает, что значения темпов роста доходов бюджета 5 и 8 месяцев назад определяют сегодняшний темп роста на 87,3%. Таким образом, модель прогнозирования безработицы в данном случае имеет вид:

$$\tilde{x}_t = x_{t-1} \sum_{y \in Y} yp(y|y_{t-5}, y_{t-8}).$$

На рис. 6.3.44 приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели за период 01.1993 – 05.2000. Как видно из приведенного рисунка, графики исходных данных и имитации в этом случае достаточно близки. Средняя относительная ошибка (MAPE) имитации за анализируемый период составляет 1,15%.

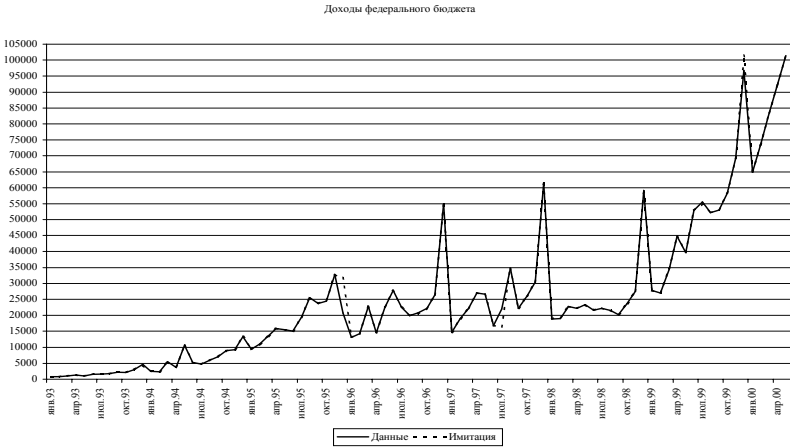


Рис. 6.3.44. Имитация

Для проверки качества прогнозирования, как и выше, использованы данные за период 06.2000 – 12.2001. Построено два одношаговых прогноза: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-5}, y_{t-8})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и с обучением (на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-5}, y_{t-8})$  уточняется за счет добавления новой точки). В табл. 6.3.36 и на рис. 6.3.45 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 27,97%, а с обучением 27,32%.

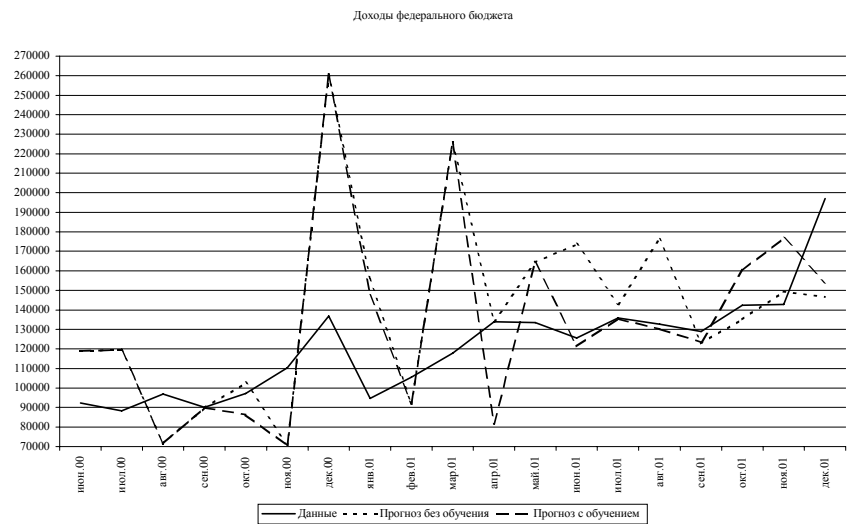


Рис. 6.3.45. Прогноз

Таблица 6.3.36

Вероятностный прогноз налоговых доходов федерального бюджета

Дата	Доходы федераль-ного бюджета	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	ошибка
июн.00	92224,8	118875,39	28,90	118875,39	28,90
июл.00	88387,4	119659,80	35,38	119659,80	35,38
авг.00	96925,3	71616,34	26,11	71616,34	26,11
сен.00	90146,7	89927,48	0,24	89927,48	0,24
окт.00	97209,8	102599,57	5,54	86395,79	11,12

Таблица 6.3.36 (продолжение)

Дата	Доходы федераль-ного бюджета	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	Ошибка
ноя.00	110286,2	70618,59	35,97	70618,59	35,97
дек.00	136893,8	260729,22	90,46	260729,22	90,46
янв.01	94601,9	155804,27	64,69	147619,60	56,04
фев.01	105459,5	91764,47	12,99	91764,47	12,99
мар.01	117906,2	225713,88	91,44	225713,88	91,44
апр.01	133928,6	134193,75	0,20	81480,37	39,16
май.01	133450,1	164458,54	23,24	164458,54	23,24
июн.01	125605,9	173707,92	38,30	121314,88	3,42
июл.01	135925,3	142957,11	5,17	135447,32	0,35
авг.01	132578,1	176360,36	33,02	130269,56	1,74
сен.01	128974,0	123006,21	4,63	123306,09	4,39
окт.01	142335,0	135366,58	4,90	160090,10	12,47
ноя.01	142813,5	149389,85	4,60	176674,60	23,71
дек.01	197117,4	146438,65	25,71	154003,14	21,87
Средняя ошибка прогноза			27,97		27,32

6.3.6. Валовой внутренний продукт

В качестве исходных данных для построения модели прогнозирования валового внутреннего продукта используются квартальные данные за период I/1994 – II/2000. Данные за период III/2000 – IV/2001 используются для проверки построенных в разделе моделей прогнозирования. График этих данных приведен на *рис. 6.3.46*.

В соответствии с проведенным ранее исследованием ряда ВВП на временном интервале I/1994 – II/2000 нельзя сделать вывод о его принадлежности к *DS*- или *TS*-рядам. В то же время визуальный анализ графика ряда позволяет выдвинуть гипотезу о наличии излома тренда начиная с IV квартала 1998 г. Разобьем весь интервал наблюдений на 2 подинтервала: I/1994 – III/1998 и IV/1998 – II/2000. Для каждого из этих интервалов построим детерминированный линейный тренд. Получаем

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t)=128,737+32,978t, & t=1,...,19; \\ f_2(t)=-1953,286+139,000t, & t=20,...,25. \end{cases}$$

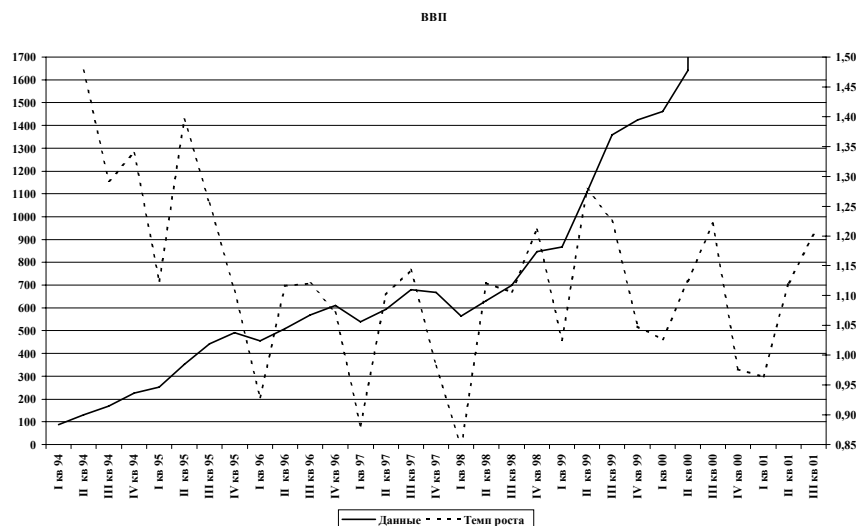


Рис. 6.3.46. Исходные данные

Статистические характеристики построенных трендов приведены в табл. 6.3.37.

Таблица 6.3.37

Тренд	R	Нормированный R <sup>2</sup>	F-статистика	Значимость F	t-статистика c <sub>0</sub>	t-статистика c <sub>1</sub>
f <sub>1</sub> (t)	0,940	0,876	128,311	0,0000	3,904	11,327
f <sub>2</sub> (t)	0,974	0,939	93,501	0,0002	5,886	9,670

Рассмотрим временной ряд  $\{y_t\} = \{x_t - f(t)\}$ . Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 5 переменных:  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-4}\}$ . Получаем зависимость показателя  $y_t$  от лага в 2 и 4 квартала с коэффициентом информативности, равным 0,900. Это означает, что значения ВВП 2 и 4 квартала назад определяют сегодняшний ВВП на 90,0%. Таким образом, модель прогнозирования ВВП имеет вид:

$$\tilde{x}_t = f_2(t) + \sum_{y \in Y} y p(y | y_{t-2}, y_{t-4}).$$

На рис. 6.3.47 приведены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели. Как видно из рисунка, графики исход-

ных данных и имитации за период I/1995 – II/2000 полностью совпадают между собой.

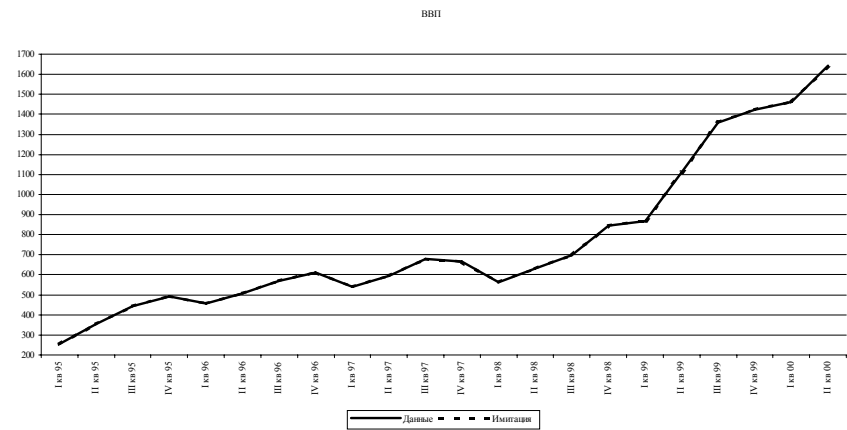


Рис. 6.3.47. Имитация

Для проверки качества прогнозирования использованы данные за период III/2000 – IV/2001. Построены три последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-2}, y_{t-4})$ , построенное на первоначальных исходных данных) и два с обучением (в обоих случаях на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-2}, y_{t-4})$  уточняется за счет добавления новой точки, но в одном используется один и тот же тренд, а во втором тренд корректируется на каждом шаге). В табл. 6.3.38 и на рис. 6.3.48 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. При этом для случая прогноза с обучением и коррекцией тренда коэффициенты функции  $f_2$  меняются от шага к шагу. Соответствующие коэффициенты приведены в табл. 6.3.39. Средняя ошибка прогноза (МАРЕ) без обучения составляет 5,93%, а с обучением – 4,47% без коррекции тренда и 4,63% – с коррекцией.

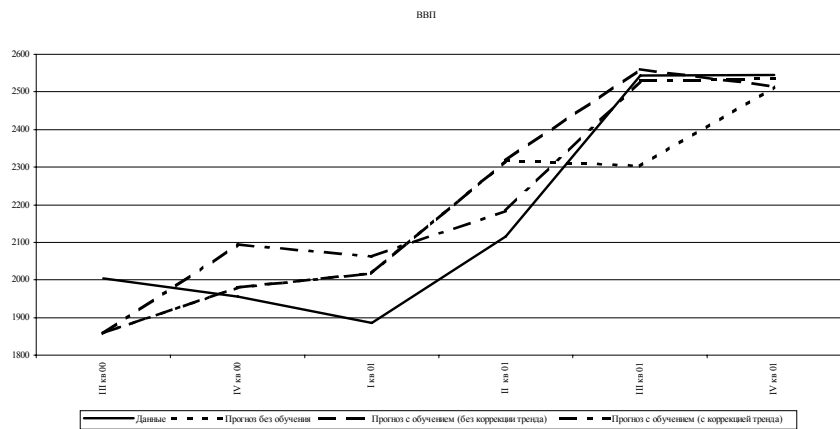


Рис. 6.3.48. Прогноз

Таблица 6.3.38

Трендовый прогноз ВВП

Дата	ВВП	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением (без коррекции тренда)		Прогноз с обучением (с коррекцией тренда)	
		результат	ошибка	результат	ошибка	результат	ошибка
III кв 00	2004	1858,5	7,26	1858,5	7,26	1858,5	7,26
IV кв 00	1956	1980,0	1,23	1980,0	1,23	2094,2	7,06
I кв 01	1886	2017,0	6,95	2017,0	6,95	2062,5	9,36
II кв 01	2116	2316,9	9,49	2316,9	9,49	2183,9	3,21
III кв 01	2543	2303,5	9,42	2560,0	0,67	2530,5	0,49
IV кв 01	2545	2514,0	1,22	2514,0	1,22	2535,4	0,38
Средняя ошибка прогноза			5,93		4,47		4,63

Таблица 6.3.39

t	c <sub>0</sub>	c <sub>1</sub>	t	c <sub>0</sub>	c <sub>1</sub>	t	c <sub>0</sub>	c <sub>1</sub>
27	-1953,286	139,000	29	-2201,467	150,367	31	-1775,636	131,636
28	-2327,810	156,024	30	-1863,733	135,467	32	-1989,145	140,787

Рассмотрим теперь построение вероятностной модели прогнозирования. В этом случае исходные данные считаются реализациями некоторой случайной величины. Поскольку в исходных данных явно содержится тренд, то преобразуем их в темповые характеристики, т.е. введем новый

ряд:  $y_t = \frac{x_t}{x_{t-1}}, t = 1, \dots, T$ .

График соответствующего временного ряда также приведен на рис. 6.3.46. Построим информативную структуру 3-го порядка для системы, содержащей 5 переменных: показатель темпа роста ВВП и его лаговые значения до 4 кварталов, т.е. для системы  $\{y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-4}\}$ . Получаем зависимость показателя темпа роста доходов бюджета от лага в 3 и 4 квартала с коэффициентом информативности, равным 0,850. Это означает, что значения темпов роста ВВП 3 и 4 квартала назад определяют сегодняшний темп роста на 85,0%. Таким образом, модель прогнозирования безработицы в данном случае имеет вид:

$$\tilde{x}_t = x_{t-1} \sum_{y \in Y} yp(y | y_{t-3}, y_{t-4}).$$

На рис. 6.3.49 представлены результаты имитации (ретропрогноз) исходных данных по приведенной модели за период II/1995 – II/2000. Как видно из рисунка, графики исходных данных и имитации в этом случае полностью совпадают.

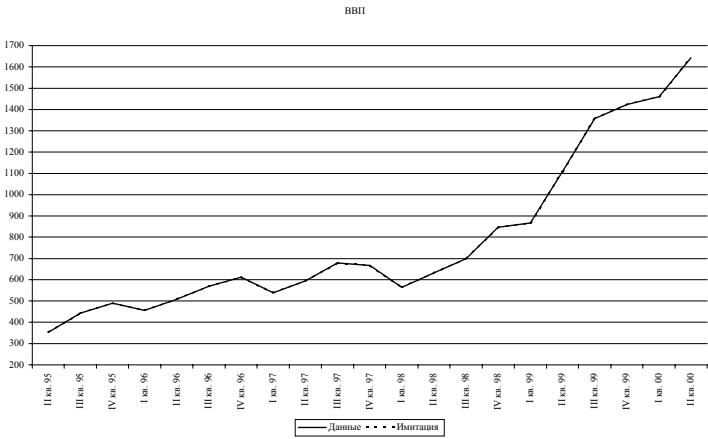


Рис. 6.3.49. Имитация



Для проверки качества прогнозирования, как и выше, использованы данные за период III/2000 – IV/2001. Построено две последовательности одношаговых прогнозов: без обучения (используется условное распределение вероятностей  $p(z_t | z_{t-3}, z_{t-4})$ ), построенное на первоначальных исходных данных) и с обучением (на каждом шаге условное распределение вероятностей  $p(y_t | y_{t-5}, y_{t-8})$  уточняется за счет добавления новой точки). В табл. 6.3.40 и на рис. 6.3.50 приведены результаты одношагового прогнозирования (без обучения и с обучением) по приведенной модели. Средняя ошибка прогноза (MAPE) без обучения составляет 15,06%, а с обучением – 11,98%.

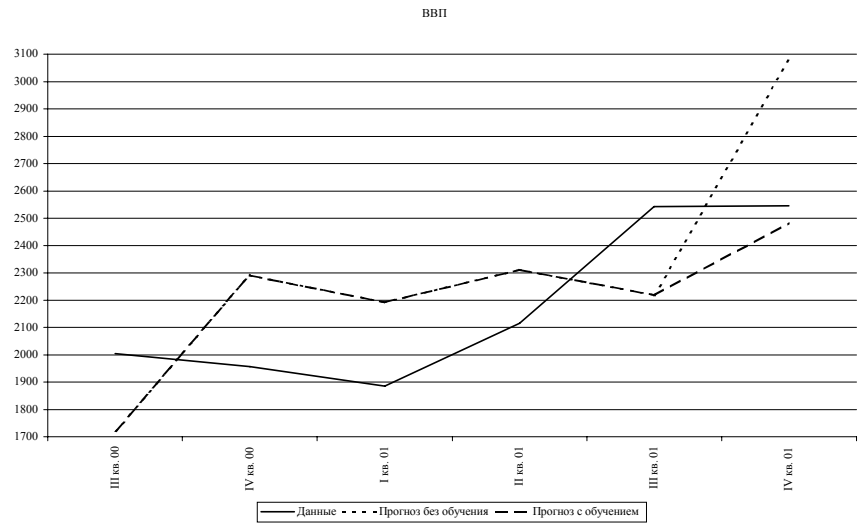


Рис. 6.3.50. Прогноз

Таблица 6.3.40

Вероятностный прогноз ВВП					
Дата	ВВП	Прогноз без обучения		Прогноз с обучением	
		результат	ошибка	результат	ошибка
III кв. 00	2004	1721,8	14,08	1721,8	14,08
IV кв. 00	1956	2290,8	17,11	2290,8	17,11
I кв. 01	1886	2191,8	16,22	2191,8	16,22
II кв. 01	2116	2311,5	9,24	2311,5	9,24
III кв. 01	2543	2218,8	12,75	2218,8	12,75
IV кв. 01	2545	3077,8	20,93	2482,1	2,47
Средняя ошибка прогноза			15,06		11,98

Проведем краткий анализ полученных результатов. Практически все построенные модели хорошо описывают динамику изменения исходных данных (см. табл. 6.3.41). Исключение составляет лишь трендовая модель доходов федерального бюджета, для которой средняя ошибка (МАРЕ) имитации составляет 6,23%. В то же время для денежных агрегатов *M0* и *M1*, динамики экспорта и ВВП обе модели дали полное совпадение имитации с исходными данными; для динамики импорта полностью совпала с исходными данными имитация по трендовой модели, а для динамики ВВП – по вероятностной модели.

Таблица 6.3.41

Средние ошибки имитации (в %)

Показатель	Трендовая модель	Вероятностная модель
Инфляция	0,40	0,94
M0	0,00	0,00
M1	0,00	0,00
M2	0,51	0,11
Экспорт	0,00	0,00
Импорт	0,00	0,54
Безработица	0,02	0,06
Налоговые доходы федерального бюджета	0,60	0,00
Доходы федерального бюджета	6,23	1,15
ВВП	0,00	0,00

Рассмотрим так называемую «наивную модель», отвечающую случайному блужданию, т.е. ситуации, когда будущее значение временного ряда является значением некоторой случайной величины, симметрично распределенной вокруг текущего значения. В этом случае наилучшим прогнозом будущего значения является текущее значение.

В табл. 6.3.42 приведены средняя ошибка (МАРЕ) имитации по такой «наивной модели» и величина относительной дисперсии по каждому из рассматриваемых рядов. Как правило, ошибка имитации по «наивной модели» тем лучше, чем меньше разброс исходных данных. Из общего правила резко выпадают результаты, относящиеся к рядам «Инфляция» и «ВВП». Что касается ряда «ВВП», то это скорее всего результат малой длины ряда: для имитации используется всего 22 точки. Для ряда «Инфляция» два значения в самом начале имитируемых данных (январь и февраль 1992 г.) резко выпадают из общей динамики. Если убрать эти две точки, то величина относительной дисперсии ряда разностей составляет 0,27%.

Таблица 6.3.42

**«Наивная модель». Средние ошибки имитации  
и дисперсии ряда разностей (в %)**

Показатель	Период имитации	Ошибки	Дисперсии
Инфляция	01.1992 $\pm$ 08.2000	4,28	7,92
M0	01.1992 $\pm$ 07.2000	9,61	0,88
M1	03.1996 $\pm$ 07.2000	4,45	0,27
M2	01.1992 $\pm$ 07.2000	7,63	0,28
Экспорт	01.1995 $\pm$ 04.2000	9,95	1,90
Импорт	01.1995 $\pm$ 04.2000	10,75	2,34
Безработица	01.1995 $\pm$ 08.2000	1,90	0,07
Налоговые доходы федерального бюджета	01.1993 $\pm$ 05.2000	22,95	13,37
Доходы федерального бюджета	01.1993 $\pm$ 05.2000	28,29	19,20
ВВП	I.1995 $\pm$ II.2000	13,46	1,22

Как видно из сравнения *табл. 6.3.41* и *6.3.42*, во всех случаях имитация рассматриваемых процессов с помощью трендовых и вероятностных моделей, использующих лаговую структуру, дает существенное улучшение точности получаемого результата. В том числе и для самого плохого случая: трендовая модель доходов федерального бюджета имитирует реальный процесс в 4,5 раза точнее, чем «наивная модель».

Все это свидетельствует о том, что построенные модели достаточно хорошо отражают внутренние закономерности изменения исследуемых рядов на анализируемых периодах времени (периодах имитации). Однако прогностические способности построенных моделей не слишком удовлетворительны. В *табл. 6.3.43* приведены абсолютные процентные ошибки (максимальные и средние) прогнозов по трендовым (без обучения, с обучением без коррекции тренда и с коррекцией тренда) и вероятностным (без обучения и с обучением) моделям по всем анализируемым временным рядам.

Результаты, приведенные в *табл. 6.3.43*, свидетельствуют о том, что не имеется надежных априорных оснований для выбора модели прогнозирования. Для ряда налоговых доходов федерального бюджета лучший результат (средняя ошибка прогноза 5,0%) получен по трендовой модели без обучения. Для рядов импорта, доходов федерального бюджета и ВВП лучший результат (средняя ошибка прогноза 9,8%, 9,2%, 4,5%, соответственно) получен по трендовой модели с обучением без коррекции тренда. Для рядов M2 и экспорта лучший прогноз (средняя ошибка 1,8% и 7,1%) получен по трен-

довой модели с обучением и коррекцией тренда. Для рядов *М0* и безработицы лучший результат (средняя ошибка прогноза 4,1%, 1,9%) получен по вероятностной модели без обучения. Наконец, для рядов инфляции и *М1* лучший прогноз (средняя ошибка 0,4%, 4,8%) получен по вероятностной модели с обучением. В табл. 6.3.44 приведены сравнительные данные о средней ошибке прогноза (MAPE) по лучшей из пяти рассмотренных моделей и «наивного прогноза».

Таблица 6.3.43

Максимальные и средние ошибки различных методов прогнозирования

Показатель	Трендовый прогноз						Вероятностный прогноз			
	без обуче- ния		с обучением				без обучения		с обучением	
			без коррек- ции тренда		с коррекци- ей тренда					
	макс.	сред.	макс.	сред.	макс.	сред.	макс.	сред.	макс.	сред.
Инфляция	18,39	6,21	2,71	1,00	1,95	0,76	1,49	0,45	<b>1,41</b>	<b>0,41</b>
M0	33,45	23,99	18,86	4,18	25,82	5,14	<b>12,63</b>	<b>4,12</b>	<b>12,63</b>	4,19
M1	21,88	15,96	14,48	5,46	<b>14,45</b>	7,75	21,19	5,22	21,19	<b>4,75</b>
M2	12,38	6,20	8,64	2,47	<b>8,28</b>	<b>1,84</b>	21,57	4,96	21,57	4,96
Экспорт	36,94	11,24	36,94	9,06	<b>23,72</b>	<b>7,06</b>	33,21	14,17	33,21	11,22
Импорт	<b>45,13</b>	11,28	<b>45,13</b>	<b>9,79</b>	45,30	13,32	51,47	20,60	48,11	16,09
Безработица	8,47	3,26	8,47	3,67	10,07	4,01	<b>5,99</b>	<b>1,91</b>	<b>5,99</b>	2,22
Налоговые доходы феде- рального бюд- жета	<b>23,53</b>	<b>5,03</b>	30,06	5,70	29,84	7,59	111,2 4	26,35	111,2 4	24,56
Доходы феде- рального бюд- жета	31,03	10,27	<b>25,31</b>	<b>9,16</b>	26,06	9,90	91,44	27,97	91,44	27,32
ВВП	9,49	5,93	9,49	<b>4,47</b>	<b>9,36</b>	4,63	20,93	15,06	17,11	11,98

Таблица 6.3.44

Средние ошибки прогноза

Показатель	«Наивный прогноз»	Прогноз по лучшей
Инфляция	0,46	0,41
М0	4,34	4,12
М1	4,05	4,75
М2	3,53	1,84

Таблица 6.3.44 (продолжение)

Показатель	«Наивный прогноз»	Прогноз по лучшей
Экспорт	5,15	7,06
Импорт	14,70	9,79
Безработица	1,40	1,91
Налоговые доходы федерального бюджета	8,90	5,03
Доходы федерального бюджета	11,13	9,16
ВВП	10,08	4,47

Данные табл. 6.3.44 свидетельствуют о невысоком качестве прогнозирования по построенным моделям. Даже при наиболее качественном прогнозе по ряду инфляции качество прогноза по вероятностной модели с обучением (средняя ошибка 0,41%) незначительно превосходит качество «наивного прогноза» (средняя ошибка 0,46%). Лишь в четырех случаях (для рядов *M2*, импорта, налоговых доходов федерального бюджета и ВВП) качество прогноза по лучшей модели заметно превосходит качество «наивного прогноза». При этом в трех случаях (для рядов *M1*, экспорта и безработицы) «наивный прогноз» дает лучший результат чем лучшая из построенных моделей.

Представляются целесообразными два пути совершенствования построенных в данной работе моделей.

Первый путь наиболее простой. По мере накопления информации можно перейти к построению информативных структур более высоких порядков. В этом случае можно получить зависимость исследуемого показателя не от двух, а от трех (для информативных структур четвертого порядка), четырех (для информативных структур пятого порядка) и более лагов. При этом, естественно, точность модели возрастает, но снижается ее надежность<sup>13</sup>.

Второй путь заключается в переходе к рассмотрению взаимосвязанных временных рядов и их моделированию векторными случайными процессами. В этом случае получается зависимость исследуемого показателя не только от его лаговых значений, но и от связанных с ним показателей и их запаздывающих значений.

<sup>13</sup> См.: Юдин А.Д. Сложность статистических систем // Доклады АН СССР, 1982. Т. 266. № 5.