ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение А. *Оптимальная политика при полных рынках.*

Рассмотрим статическую задачу минимизации потерь (1), (4), (3). Лагранжиан для этой задачи:

$$L = E_0 \sum_{t=1}^{T} \beta^t m_t^2 + \lambda E_0 \left(\sum_{t=1}^{T} \beta^t m_t - \sum_{t=1}^{T} \beta^t d_t + \mu^T b_T \right) + \eta (b_T - b^*),$$

где λ - двойственная оценка бюджетного ограничения (4).

Условия первого порядка для этой задачи имеют вид:

$$m_t = \lambda,$$

для $t = 1,\ldots,T$.

Отсюда следует, что

$$m_1 = m_2 = \ldots = m_T \equiv m^{opt}.$$

Подставляя m^{opt} в бюджетное ограничение (4), и предполагая, что ограничение на терминальный долг (3) не является связывающим, получаем решение задачи (1), (3), (4):

$$m^{opt} = 0.$$

Если же ограничение на терминальный долг (3) является связывающим, то есть $b_T = b^*$, то подстановка m^{opt} в бюджетное ограничение (4) дает

$$m^{opt} \sum_{t=1}^{T} \beta^t = E_0 \sum_{t=1}^{T} \beta^t d_t - \beta^T b^*,$$

или

$$m^{opt} = E_0 \sum_{t=1}^{T} \mu_t d_t - \beta^T b^*,$$

Таким образом, ограничение (3), является связывающим, тогда и только тогда, когда $m^{opt} > 0$, а оптимальный сеньораж равен

$$m^{opt} = \max[\ 0, d^e - \mu_T b^*].$$

Приложение B. *Оптимальная политика при неполных рынках.*

Докажем правильность выражения (11) для оптимальной политики при неполных рынках.

Вначале покажем, что

$$m_t = E_t m_{t+1} = E_t m_{t+2} = \ldots = E_t m_T. \qquad \text{(A1)}$$

Подставляя m_t из бюджетных ограничений (2) в целевую функцию (1), получаем выражение

$$E_0 \sum_{t=1}^{T} \beta^t ((R_t / G_t) b_{t-1} + d_t - b_t)^2.$$

В момент t ожидаемые дисконтированные потери составляют

$$E_t \sum_{k=0}^{T-t} \beta^k (\beta^{-1} b_{t+k-1} + d_{t+k} - b_{t+k})^2.$$

Дифференцируя по b_t, получаем условие первого порядка

$$m_t = E_t m_{t+1}.$$

Итерируя данное условие на периоды t,…, T, получаем (A1).

Теперь найдем оптимальное правило в явном виде. Используя соотношения (A1), решим задачу управления долгом (1)–(3) по принципу динамического программирования, то есть с помощью обратной рекурсии. Вначале рассмотрим решение о финансировании дефицита в терминальный период T. Если терминальное ограничение (3) в этом периоде не является связывающим, то $m_T^{opt} = 0$. Если данное ограничение – связывающее, то $b_T^{opt} = b^*$, и

$$m_T^{opt} = d_T + \beta^{-1} b_{T-1} - b^*,$$

Таким образом, для терминального периода имеем правило оптимальной политики:

$$m_T^{opt} = \max[0, d_T + \beta^{-1} b_{T-1} - b^*].$$

При этом режим инфляционного финансирования реализуется, если

$$d_T + \beta^{1} b_{t-1} < b^*.$$

Рассмотрим теперь период T-1. Если терминальное ограничение (3) в этом периоде не является связывающим, то

$$m_{T-1}{}^{opt} = E_{T-1} m_T{}^{opt} = 0.$$

В противном случае ожидаемое значение терминального долга равняется b^*, а сеньораж рассчитывается на основе соотношений (A1):

$$m_{T-1} = E_{T-1} m_T^{opt} = d_T^e + \beta^{-1} b_{T-1} - b^* \qquad \text{(A2)}$$

В правую часть данного выражения входит величина b_{T-1} – долг на конец периода T-1. Она, в свою очередь, вычисляется из бюджетного ограничения данного периода как

$$b_{T-1} = d_{T-1} + \beta^{-1} b_{T-2} - m_{T-1} \qquad \text{(A3)}$$

Подставляя b_{T-1} из (A3) в (A2), получаем

$$\begin{aligned} m_{T-1}^{opt} &= (1+\beta^{-1})^{-1}(E_{T-1} d_T + \beta^{-1} d_{T-1} + \beta^{-2} b_{T-2} - b^*) = \\ &(1+\beta)^{-1}(\beta E_{T-1} d_T + d_{T-1} + \beta^{-1} b_{T-2} - \beta b^*) = \\ &d_{T-1}^e + \mu_{T-1,0} \beta^{-1} b_{T-2} - \mu_{T-1,1} b^*. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем выражение для оптимального сеньоража в периоде *T-1*:

$$m_{T-1}^{opt} = \max[0, d_{T-1}^{e} + \mu_{T-1,0}\beta^{-1}b_{T-2} - \mu_{T-1,1}b^{*}], \tag{A4}$$

Теперь покажем, что если соотношение (A4) выполнено для некоторого периода *t*, то оно выполнено для периода *t*-1. Итак, пусть

$$m_{t}^{opt} = \max[0, d_{t}^{e} + \mu_{t,0}\beta^{-1}b_{t-1} - \mu_{t,T-t}b^{*}], \tag{A5}$$

Рассмотрим период *t*-1. Если терминальное ограничение (3) в этом периоде не является связывающим, то

$$m_{t-1}{}^{opt} = E_{t-1}m_{t}{}^{opt} = \ldots = 0.$$

В противном случае ожидаемое значение терминального долга равняется b^*. Используя (A1), имеем:

$$m_{t-1} = E_{t-1}m_{t}^{opt} = E_{t-1}d_{t}^{e} + \mu_{t,0}\beta^{-1}b_{t-1} - \mu_{t,T-t}b^{*} \tag{A6}$$

Долг на конец периода *t*-1, b_{t-1}, вычисляется из бюджетного ограничения данного периода как

$$b_{t-1} = d_{t-1} + \beta^{-1} b_{t-2} - m_{t-1}. \qquad \text{(A7)}$$

Подставляя b_{t-1} из (A7) в (A6), получаем

$$m_{t-1} = E_{t-1} d_t^e + \mu_{t,0} \beta^{-1} (d_{t-1} + \beta^{-1} b_{t-2} - m_{t-1}) - \mu_{t,T-t} b^*.$$

Преобразуя это соотношение, имеем

$$(1 + \mu_{t,0} \beta^{-1}) m_{t-1} = E_{t-1} d_t^e + \mu_{t,0} \beta^{-1} d_{t-1} + \mu_{t,0} \beta^{-2} b_{t-2} - \mu_{t,T-t} b^*.$$

Поскольку

$$\mu_{t,\tau} = \beta^{\tau} / \sum_{k=0}^{T-t} \beta^k,$$

получаем:

$$\frac{\sum_{k=0}^{T-t+1} \beta^k}{\beta \sum_{k=0}^{T-t} \beta^k} m_{t-1} = E_{t-1} \sum_{i=0}^{T-t} \frac{\beta^i d_{t+i}}{\sum_{k=0}^{T-t} \beta^k} + \frac{d_{t-1}}{\beta \sum_{k=0}^{T-t} \beta^k} + \frac{\beta^{-1} b_{t-2}}{\beta \sum_{k=0}^{T-t} \beta^k} - \frac{\beta^{T-t}}{\sum_{k=0}^{T-t} \beta^k} b^*$$

или

$$m_{t-1} = E_{t-1} \sum_{i=0}^{T-t} \frac{\beta^{i+1} d_{t+i}}{\sum_{k=0}^{T-t+1} \beta^k} + \frac{d_{t-1}}{\sum_{k=0}^{T-t+1} \beta^k} + \frac{\beta^{-1} b_{t-2}}{\sum_{k=0}^{T-t+1} \beta^k} - \frac{\beta^{T-t+1}}{\sum_{k=0}^{T-t+1} \beta^k} b^* =$$

$$d_{t-1}^e + \mu_{t-1,0} \beta^{-1} b_{t-2} - \mu_{t-1,T-t+1} b^*.$$

Таким образом, решение для периода t-1 имеет следующий вид:

$$m_{t-1}^{opt} = \max[\,0, d_{t-1}^{e} + \mu_{t-1,0}\beta^{-1}b_{t-2} - \mu_{t-1,T-t+1}b^{*}],$$

что доказывает (11) для $t = 1,\ldots,T$.

Подставляя (11) в бюджетное ограничение (2), получаем выражения для оптимальных заимствований (13), (14).

Приложение C. *Правила политики для большого временного горизонта*

Докажем выражения (6′),(7′) и (11′),(12′) для оптимальной политики при большом горизонте планирования. Для случая полных рынков из (6), (8)-(9) получаем величину сеньоража и заимствований при $T \to \infty$:

$$m^{opt} = \max[\,0, d^{e} - \mu_{T}b^{*}] \approx \max[\,0, d^{e}\,],$$

$$\Delta b_{t}^{opt} = d_{t} - m_{t} + rb_{t-1} \approx d_{t} - \max[0, d^{e}] + rb_{t-1}.$$

Аналогично, для случая неполных рынков получаем из (11):

$$m_t^{opt} = \max[0, d_t^e + \mu_{t,0}\beta^{-1}b_{t-1} - \mu_{t,T-t}b^*] \approx$$
$$\max[0, d_t^e + (1-\beta)\beta^{-1}b_{t-1} - (1-\beta)\beta^{T-t}b^*] = \max[0, d_t^e + rb_{t-1}],$$

где d_t^e – средний дефицит, ожидаемый на период (t,∞).

Отсюда и из (13) следует, что

$$\Delta b_t^{opt} = d_t - \max[0, d_t^e + rb_{t-1}] + rb_{t-1}.$$

<u>Приложение D. *Оптимальная политика с учетом корреляции процента и дефицита*</u>

Рассмотрим решение в периоде T-1. Если терминальное ограничение (3) в этом периоде не является связывающим, то

$$m_{T\text{-}1}{}^{opt} = E_{T\text{-}1}m_T{}^{opt} = 0.$$

Если терминальное ограничение связывающее, то ожидаемое значение терминального долга равняется b^*, а сеньораж рассчитывается на основе соотношения (17):

$$m_{T-1} = E_{T-1}m_T^{opt} + \mathrm{cov}_{T-1}(\theta_T, d_T) = \\ d_T^e + \beta^{-1}b_{T-1} - b^* + \sigma_{T-1} \qquad \text{(A8)}$$

Величина b_{T-1} – долг на конец периода T-1 вычисляется из бюджетного ограничения данного периода как

$$b_{T-1} = d_{T-1} + \theta_t \beta^{-1} b_{T-2} - m_{T-1} \tag{A9}$$

Подставляя b_{T-1} из (A9) в (A8), получаем

$$\begin{aligned}
&m_{T-1}^{opt} = (1+\beta^{-1})^{-1}[E_{T-1}d_T + \beta^{-1}d_{T-1} + \theta_t \beta^{-2} b_{T-2} - b^* + \sigma_{T-1}] = \\
&(1+\beta)^{-1}[\beta E_{T-1}d_T + d_{T-1} + \theta_t \beta^{-1} b_{T-2} - \beta b^* + \beta\sigma_{T-1}] = \\
&d_{T-1}^e + \mu_{T-1,0}\theta_{T-1}\beta^{-1}b_{T-2} - \mu_{T-1,1}b^* + \vartheta_{T-1,0}\sigma_{T-1}.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем общее выражение для оптимального сеньоража в периоде T-1:

$$m_{T-1}^{opt} = \max[0, d_{T-1}^e + \mu_{T-1,0}\theta_{T-1}\beta^{-1}b_{T-2} - \mu_{T-1,1}b^* + \vartheta_{T-1,0}\sigma_{T-1}]. \tag{A10}$$

Это выражение удовлетворяет (18) при $t = T$-1.

Теперь покажем, что если (18) выполнено для некоторого периода t, то оно выполнено для периода t-1. Итак, пусть

$$m_t^{opt} = \max[0, d_t^e + \mu_{t,0}\theta_t \beta^{-1} b_{t-1} - \mu_{t,T-t} b^* + E_t \sum_{i=0}^{T-t-1} \vartheta_{t,i}\sigma_{t+i}]. \tag{A11}$$

Рассмотрим период t-1. Если терминальное ограничение (3) в этом периоде не является связывающим, то

$$m_{t-1}^{opt} = E_{t-1}m_t^{opt} = \ldots = 0.$$

В противном случае ожидаемое значение терминального долга равняется b^*. Используя (A1), имеем:

$$m_{t-1} = E_{t-1}m_t^{opt} + \mathrm{cov}_{t-1}(\theta_t, d_t) = E_{t-1}d_t^e + \mu_{t,0}\beta^{-1}b_{t-1}E_{t-1}\theta_t - \mu_{t,T-t}b^* + E_{t-1}\sum_{i=0}^{T-t-1}\vartheta_{t,i}\sigma_{t+i} + \sigma_{t-1}. \quad \text{(A12)}$$

Долг на конец периода t-1, b_{t-1}, вычисляется из бюджетного ограничения данного периода как

$$b_{t-1} = d_{t-1} + (R_{t-1}/G_{t-1})b_{t-2} - m_{t-1} = d_{t-1} + \theta_{t-1}\beta^{-1}b_{t-2} - m_{t-1}. \quad \text{(A13)}$$

Подставляя b_{t-1} из (A13) в (A12), получаем

$$m_{t-1} = E_{t-1}d_t^e + \mu_{t,0}\beta^{-1}(d_{t-1} + \theta_{t-1}\beta^{-1}b_{t-2} - m_{t-1}) - \mu_{t,T-t}b^* + E_{t-1}\sum_{i=0}^{T-t-1}\vartheta_{t,i}\sigma_{t+i} + \sigma_{t-1}.$$

Преобразуя это соотношение, имеем

$$(1 + \mu_{t,0}\beta^{-1})m_{t-1} = E_{t-1}d_t^e + \mu_{t,0}\beta^{-1}d_{t-1} + \mu_{t,0}\theta_{t-1}\beta^{-2}b_{t-2} - \mu_{t,T-t}b^* + E_{t-1}\sum_{i=0}^{T-t-1}\vartheta_{t,i}\sigma_{t+i} + \sigma_{t-1}.$$

Представим это выражение в виде:

$$\frac{\sum_{k=0}^{T-t+1}\beta^k}{\beta\sum_{k=0}^{T-t}\beta^k}m_{t-1}=E_{t-1}\sum_{i=0}^{T-t}\frac{\beta^i d_{t+i}}{\sum_{k=0}^{T-t}\beta^k}+\frac{d_{t-1}}{\beta\sum_{k=0}^{T-t}\beta^k}+\frac{\theta_{t-1}\beta^{-1}b_{t-2}}{\beta\sum_{k=0}^{T-t}\beta^k}-\frac{\beta^{T-t}}{\sum_{k=0}^{T-t}\beta^k}b*$$

$$+E_{t-1}\sum_{i=0}^{T-t-1}\frac{\sum_{k=i+1}^{T-t}\beta^k\sigma_{t+i}}{\sum_{k=0}^{T-t}\beta^k}+\sigma_{t-1}$$

или

$$m_{t-1}=E_{t-1}\sum_{i=0}^{T-t}\frac{\beta^{i+1}d_{t+i}}{\sum_{k=0}^{T-t+1}\beta^k}+\frac{d_{t-1}}{\sum_{k=0}^{T-t+1}\beta^k}+\frac{\theta_{t-1}\beta^{-1}b_{t-2}}{\sum_{k=0}^{T-t+1}\beta^k}-\frac{\beta^{T-t+1}}{\sum_{k=0}^{T-t+1}\beta^k}b*=$$

$$E_{t-1}\sum_{i=0}^{T-t-1}\frac{\sum_{k=i+1}^{T-t}\beta^{k+1}\sigma_{t+i}+\beta\sigma_{t-1}}{\sum_{k=0}^{T-t+1}\beta^k}$$

$$d_{t-1}^e+\mu_{t-1,0}\theta_{t-1}\beta^{-1}b_{t-2}-\mu_{t-1,T-t+1}b*+E_{t-1}\sum_{i=0}^{T-(t-1)-1}\vartheta_{t-1,i}\sigma_{t-1+i}.$$

Таким образом, решение для периода t-1 имеет следующий вид:

$$m_{t-1}^{opt}=\max[0,d_{t-1}^e+\mu_{t-1,0}\theta_{t-1}\beta^{-1}b_{t-2}-\mu_{t-1,T-t+1}b*+E_{t-1}\sum_{i=0}^{T-t}\vartheta_{t-1,i}\sigma_{t-1+i}].$$

что доказывает (18) для $t = 1,\ldots,T$.