

СРАВНЕНИЕ ПРОГНОЗНЫХ МЕР РИСКА С ПОМОЩЬЮ МОДЕЛЕЙ С ДЛИННОЙ ПАМЯТЬЮ

Е. Синельникова-Мурылева, с.н.с., Центра изучения проблем центральных банков
ИПЭИ РАНХиГС,

Н. Чухров, ведущий аналитик Департамента операций на финансовых рынках Банка России

Управление финансовыми рисками основано на сравнении мер риска и доходностей среди различных классов активов или портфелей. В случае, когда агент обладает большим портфелем активов или если он управляет портфелем государственных активов, главным критерием при выборе портфеля активов для него становится снижение риска при сохранении определенного уровня доходности.

Примерами величин, с помощью которых можно сравнить несколько портфелей по риску, являются:

- 1) волатильность,
 - 2) VaR (Value-at-Risk),
 - 3) ожидаемые потери (Expected Shortfall),
 - 4) мера систематического риска (бета портфеля)
- и др.

В этой работе будет рассмотрена мера VaR, так как она предлагается Международной ассоциацией рынков капитала (Comotto, 2012)¹ в качестве меры обеспечения залоговых активов, т.н. показатели “haircuts” и “margin ratio”.

Сравнение мер риска может быть проделано с помощью большого класса параметрических и полупараметрических моделей. На сегодняшний день наиболее популярным является класс моделей обобщенной авторегрессионной условной гетероскедастичности (GARCH) (Hurlin, Laurent, Quaedly, Smeekes, 2015)².

Однако в современных реалиях, имея огромные вычислительные ресурсы и доступ к большим массивам данных, крупные компании зачастую имеют нормативы, в которых заложен минимальный размер выборки, необходимый для прогноза риск-мер (например, не менее, чем за 5 лет). На больших выборках некоторые классы ARCH моделей сталкиваются со следующими проблемами (подробно разобрано, например, у Villar (2010)³:

- 1) кластеризация доходностей (частично решается моделями класса GARCH) – проблема, возникающая при образовании «кластеров» из положительных и/или отрицательных доходностей, которые мешают прогнозированию волатильности;
- 2) асимметрия в доходностях (решается, например, Threshold-GARCH, EGARCH) – проблема, возникающая из-за того, что положительная доходность имеет свойство дольше «задерживаться» в рядах данных;
- 3) неотрицательность волатильности (решается, например, EGARCH) – проблема, возникающая из-за чувствительности моделей к параметрам, которая может привести к отрицательным величинам волатильности;
- 4) наличие длинной памяти – многие исследователи (например, Andersen et al. (2001)⁴, Taylor (1986)⁵ показали, что ряды доходностей и их волатильности имеют гиперболически затухающую функцию частной автокорреляции, что является признаком наличия длинной памяти у рядов. Они также показали, что такие ряды могут быть описаны с помощью моделей с дробной интеграцией, которые учитывают наличие длинной памяти. Дополнительной мотивацией использовать модель с длинной

¹ Comotto R. (2012). “Haircuts and initial margins in the repo market”, ICMA European Repo Council.

² Hurlin C., Laurent S., Quaedly R., Smeekes S. (2015). “Risk Measure Inference”. Journal of Business and Economic Statistics, 35. P. 499–512.

³ Villar J., R. (2010). “Volatility Models with Leverage Effect”, Universidad Carlos III De Madrid, doctoral thesis.

⁴ Andersen T.G., T. Bollerslev, F.X. Diebold, P.Laybs (2001). “The distribution of realized exchange rate volatility”. Journal of the American Statistical Association, 96. P. 42–55.

⁵ Taylor S.J. (1986). “Modelling Financial Time Series”, Wiley.

памятью является тот факт, что на рынке валют гипотеза об эффективности рынка часто отвергается (например, у Kallianiotis (2018)¹), а значит, часть информации не учитывается полностью в последней цене, и можно предсказать часть риск-премии, используя прошлые значения. Модели с длинной памятью используют наиболее полную и «долгую» прошлую информацию, поэтому их использование целесообразно.

В настоящей работе предлагается исследование доходности валютных портфелей, состоящих из различных корзин валют. Задача выбора наименее рискованного портфеля валют из возможного набора является одной из основных для держателей крупных портфелей активов. Как показали Taylor (1986)², Ding et al. (1993)³, Pong et al. (2008)⁴, доходность валютных курсов обладает длинной памятью, а значит, должна моделироваться с помощью дробно-интегрированных моделей.

Дробно-интегрированная экспоненциальная модель обобщенной условной гетероскедастичности

В процессах с условной гетероскедастичностью доходности описываются следующим процессом:

$$R_t = \sigma_t \varepsilon_t \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и условным стандартным отклонением $\sigma_t = \sigma_t(\Theta_{t-1})$, где Θ_{t-1} – множество дисперсий, полученных с помощью имеющейся информации на момент времени $t-1$.

Простая модель класса ARCH(p) предлагает моделировать волатильность следующим образом (Engle, 1982)⁵:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t-i}^2, \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (2)$$

где p – порядок модели, α_0 – свободный член, α_i – коэффициенты при запаздывающих переменных. Обобщенная модель условной гетероскедастичности (GARCH(p,q), Nelson (1991))⁶ полагает наличие зависимости волатильности не только от рядов доходности, но и от своих значений в прошлом:

$$\sigma_t^2 = w + \sum_{i=1}^p \alpha_i R_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2, \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

где q – порядок запаздывающих волатильностей, w – свободный член, β_j – коэффициент при запаздывающих волатильностях. Чтобы избавиться от возможных отрицательных значений вводится экспоненциальная форма GARCH (EGARCH(p,q)):

$$\ln(\sigma_t^2) = w + \frac{\alpha_p(L)}{\beta_q(L)} [\theta \varepsilon_{t-1} + \gamma (|\varepsilon_{t-1}| - \mathbb{E}(|\varepsilon_{t-1}|))], \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (4)$$

где $f_n(L) = 1 - \sum_{i=1}^n f_i L^i$, θ и γ – некоторые параметры, $\mathbb{E}(|\varepsilon_{t-1}|) = \text{const}, \forall t \in \mathbb{Z}$. Наконец, добавляя возможность учитывать длинную память в рядах волатильностей, получается модель FIEGARCH (p, d, q):

$$\ln(\sigma_t^2) = w + \frac{\alpha_p(L)}{\beta_q(L)} (1-L)^{-d} [\theta \varepsilon_{t-1} + \gamma (|\varepsilon_{t-1}| - \mathbb{E}(|\varepsilon_{t-1}|))], \forall t \in \mathbb{Z}, \quad (5)$$

где d – параметр дробной интегрированности, $(1-L)^d = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(k-d)}{\Gamma(k+1)\Gamma(-d)}$, $\Gamma(x)$ – Гамма-функция Эйлера. Такая модель избегает все проблемы, описанные выше (см., например, Lopes and Prass (2013)⁷). Параметр дробной интеграции может принимать значения от 0 до 1. В случае $d=0$ модель становится EGARCH, если $d=1$, то модель переходит в класс интегрированных GARCH моделей.

¹ Kallianiotis I.N. (2018). "How Efficient is the Foreign Exchange Market". Athens Journal of Business and Economics, vol. 4(3). P. 293–326.

² Taylor S.J. (1986). "Modelling Financial Time Series", Wiley.

³ Ding Z.C., Granger W.J., Engle R.F. (1993). "A long memory property of stock markets and a new model". Journal of Empirical Finance, 1. P. 83–106.

⁴ Pong S., Shackleton M.B., Taylor S.J. (2008). "Distinguishing short and long memory volatility specification". The Economic Journal, 11. P. 617–637.

⁵ Engle R.F. (1982). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of Variance of U.K. Inflation". Econometrica, 50. P. 987–1008.

⁶ Nelson D.B. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A new Approach", Econometrica, 59. P. 347–370.

⁷ Lopes S.R.C., Prass T.S. (2013). "Theoretical Results on fractionally Integrated Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Processes". Mathematics Institute – UFRGS, Brazil.

Для того, чтобы получить оценки параметров в данной модели, можно воспользоваться процедурой, описанной у Prass (2008)¹:

1) задать начальные параметры $\psi=(d, w, \theta, \gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^{p+q+4}$;

2) определить $\mathbb{E}(|\varepsilon_{t-1}|)$; в рамках данного исследования эта величина равна $\sqrt{2/\pi}$, исходя из предпосылки о нормальности распределений $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$, так как:

$$\mathbb{E}(|\varepsilon_t|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varepsilon| e^{-\varepsilon^2/2} d\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} |\varepsilon| e^{-\varepsilon^2/2} d\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\pi}}; \quad (6)$$

3) задать $\ln(\widetilde{\sigma}^2)$, где $\widetilde{\sigma}^2 = [\mathbb{V}(R_t)]^2$.

Так как $\mathbb{E}(|\varepsilon_{t-1}|)$ и w – константы, то (5) можно переписать как:

$$\begin{aligned} \beta_q(L)(1-L)^d \ln(\sigma_t^2) &= \\ &= w\beta_q(L)(1-L)^d + \alpha_p(L)[\theta\varepsilon_{t-1} + \gamma(|\varepsilon_{t-1}| - \mathbb{E}(|\varepsilon_{t-1}|))], \\ w\beta_q(L)(1-L)^d &= 0, \text{ так как } (1-1)^d = 0, \\ \beta_q(L)(1-L)^d \ln(\sigma_t^2) &= -\gamma * \mathbb{E}(|\varepsilon_{t-1}|) * \alpha_p(1) + \alpha_p(L) * [\theta\varepsilon_{t-1} + \gamma|\varepsilon_{t-1}|], \\ \ln(\sigma_t^2) &= c + \sum_{i=1}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^{\min\{i,q\}} \delta_{d,i-j} \beta_i \right] \ln(\sigma_{t-i}^2) + \sum_{k=0}^p (\tau_k \varepsilon_{t-1} + \varphi_k |\varepsilon_{t-1}|), \forall t \in \mathbb{Z} \quad (7) \end{aligned}$$

где $c = -\gamma * \mathbb{E}(|\varepsilon_{t-1}|) * \alpha_p(1)$, $\delta_{d,0} = 1$, $\delta_{d,l} = -\prod_{i=1}^l \frac{(i-1-d)}{i}$, $\tau_0 = \theta$, $\varphi_0 = \gamma$,

$\tau_k = -\theta\alpha_k, \forall k \in \{1; p\}$, $\beta_0 = 1$, $\varphi_k = -\gamma\alpha_k, \forall k \in \{1; p\}$.

В такой постановке набор параметров принимает вид: $\psi^*=(d, \theta, \gamma, \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q) \in \mathbb{R}^{p+q+3}$, так как эффект от константы w зануляется.

4) Для $t=1$:

$$\ln(\sigma_t^2) = c + \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=0}^{\min\{i,q\}} \delta_{d,i-j} \beta_i \right] \ln(\widetilde{\sigma}^2), \quad (8)$$

так как полагается, что $\varepsilon_t=0$, где $t < 1$. Видно, что в формуле (8) бесконечная сумма заменяется конечной, при этом для $t < 1$ волатильность равна исторической дисперсии. В конечной выборке сумма $\sum_{j=1}^n \delta_{d,i}$ не будет в точности равна 1, однако она стремится к 1 с ростом n и d . Как показали Pong et al. (2008)², при выборке $n > 2000$ наблюдений можно использовать модель с длинной памятью, а если в этом случае оценка параметра $d > 0.25$, то сумма $\sum_{j=1}^n \delta_{d,i}$ в среднем принимает значения больше 0,9. Заметим, что параметр w , который выпал из оцениваемого набора переменных, можно задать как $\ln(\widetilde{\sigma}^2)$, так как $\ln(\sigma_t^2) = \ln(\widetilde{\sigma}^2)$ для $t < 1$.

5) Для $t > 1$ итерационно выполняется (7), и в случае нормально распределенных $\{\varepsilon_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$ вычисляется значение логарифмического максимального правдоподобия как:

$$\ln(l(\psi^*, R)) = -\frac{n}{2} * \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^n \left[\ln(\sigma_t^2) + \frac{R_t^2}{\sigma_t^2} \right], \quad (9)$$

$$\widehat{\psi}^* = \operatorname{argmax}[\ln(l(\psi^*, R))]. \quad (10)$$

Прогнозирование FIEGARCH (p, d, q) процесса на h шагов вперед можно определить по следующей формуле:

$\ln(\sigma_{t+h}^2) = w + \frac{\alpha_p(L)}{\beta(L)(1-L)^d} [\theta\varepsilon_{t+h-1} + \gamma(|\varepsilon_{t+h-1}| - \mathbb{E}(|\varepsilon_{t+h-1}|))], \forall t \in \mathbb{Z}$, (10), выполняя итерационно каждый шаг от 1 до h .

Прогнозирование VAR

Прогнозное значение Value-at-Risk на h периодов вперед определяется по следующей формуле:

¹ Prass T.S. (2008). "Analise e Estimacao de Medidas de Risco em Processos FIEGARCH". Master Thesis in Mathematics, federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

² Pong S., Shackleton M.B., Taylor S.J. (2008). "Distinguishing short and long memory volatility specification". The Economic Journal, 11. P. 617-637.

$$\text{VaR}_{t+h}^{1-\alpha} = f_{\alpha}^{-1}(R_{t+h}), \quad (11)$$

где α – вероятность, с которой значения доходности опустятся ниже VaR , $f_{\alpha}^{-1}(R_{t+h})$ – квантиль посчитанной доходности на период $t+h$ уровня α .

Для прогнозирования VaR можно воспользоваться процедурой, описанной, например, у Xekalaki and Degiannakis (2010)¹, модифицировав ее для модели FIEGARCh:

Шаг 1. Сгенерировать N рядов длины h , состоящих из $\tilde{\varepsilon}_{i,n}$, $i \in 1:h, n \in 1:N$, где N – требуемый размер выборки при реализации Монте-Карло. Ряды можно сформировать из соответствующего распределения (в рамках данного исследования – это нормальное распределение) или методом бутстрапа из реализованных $\{\varepsilon_t\}_{t \in 1:n}$.

Шаг 2. Посчитать реализованную волатильность на период вперед:

$$\sigma_{t+1} = \sqrt{e^{\frac{\alpha_p(L)}{\beta_q(L)(1-L)} \left[\theta \varepsilon_t + \gamma (|\varepsilon_t| - \mathbb{E}(|\varepsilon_t|)) \right]}}. \quad (12)$$

Шаг 3. Для $h=1$ сформировать ряд размера N $R_{t+1,n} = \sigma_{t+1} \tilde{\varepsilon}_{1,n}$.

Шаг 4. Посчитать $\text{VaR}_{t+1}^{1-\alpha}$.

Шаг 5. Провести шаги 2–4 для всех $h > 2$ для каждого сгенерированного ряда $\tilde{\varepsilon}_n$.

Сравнение риск-мер разных портфелей

Для сравнения прогнозных риск-мер различных портфелей можно воспользоваться методикой, представленной у Hurlin et al. (2015)²:

- 1) расчет прогнозных $\text{VaR}_{i,t+k}^{1-\alpha}$ для каждого k из $\{1, h\}$ и каждого портфеля i ;
- 2) расчет реализованной $\text{VaR}_{i^*}^{1-\alpha}$ (посчитанной по имеющемуся ряду) для каждого портфеля i ;
- 3) для момента прогноза k ранжировать портфели по величине риск-меры (от менее рискованной к самой рискованной);

- 4) вычислить статистики $RM = \frac{|\text{VaR}_{i,t+k}^{1-\alpha} - \text{VaR}_{j,t+k}^{1-\alpha}|}{|\text{VaR}_{i^*}^{1-\alpha} - \text{VaR}_{j^*}^{1-\alpha} - (\text{VaR}_{i,t+k}^{1-\alpha} - \text{VaR}_{j,t+k}^{1-\alpha})|}$ для всех i ;

5) создать текущую корзину из всех портфелей;

6) создать смежные корзины и «выбрасывать» в них портфели, чьи статистики RM будут больше 1 (начинать сравнение с наименее рискованного портфеля), и проделывать процедуру, пока в каждой корзине не будут портфели с попарными статистиками $RM < 1$;

7) проделать пункты 3–6 для каждого момента прогноза.

В результате получается список корзин на каждую дату, в которой находятся одинаковые по риску портфели валют.

Результаты моделирования

Для анализа методики на реальных данных были взяты спот курсы доллара к семи валютам за период с 31.12.2009 по 05.04.2019 (чтобы ряд был больше 2000 наблюдений) из терминала Bloomberg. Были выбраны следующие валюты: Австралийский доллар (aud), Британский фунт (gbp), Евро (eur), Канадский доллар (cad), Российский рубль (rub), Швейцарский франк (chf) и Японская йена (jpy). Были взяты именно такие валютные курсы по причине того, что страны, в которых обращаются данные валюты, обладают наиболее открытыми торговыми площадками активов, популярных у российских инвесторов. Курс доллара к этим валютам брался по причине того, что он традиционно является базовой валютой, и инвесторы обычно меряют доходности в долларах. Далее вычислялся ряд доходностей курсов по формуле:

$$R_t = \ln(FX_{i,t}) - \ln(FX_{i,t-1}), \quad (13)$$

где R_t – доходность валютного курса в момент времени t , $FX_{i,t}$ – валютный курс i на момент времени t . Затем формировался базовый портфель (prf_1), в котором веса валют (округленные до сотых) определены случайным образом (нормализованные значения случайной величины, распределенной равномерно на $[0,1]$ так, чтобы их сумма равнялась 1). После формировались портфели валют так, чтобы структура их валют не отличалась от структуры валют базового портфеля более, чем на 5% (т.е. каждая валюта менялась на некоторую Δ_i так, чтобы $|\Delta_i| \leq 0.05$ и $\sum_{i=1}^7 \Delta_i = 0$). Выбор отклонений в

¹ Xekalaki E., Degiannakis S. (1987). "ARCH Models for Financial Applications". Wiley.

² Hurlin C., Laurent S., Quaedvlieg R., Smeeke S. (2015). "Risk Measure Inference". Journal of Business and Economic Statistics, 35. P. 499–512.

таких величинах можно объяснить тем, что инвестор, располагающий большим портфелем валютных активов не может в короткий срок перераспределить большое количество средств (из-за ограничений, связанных с ликвидностью на рынке валютных активов, спросом и пр.) Ниже представлена *табл. 1* со сформированными портфелями. Все портфели очищались от следующих единичных выбросов, чтобы не дестабилизировать оценку коэффициентов:

- 1) 06.09.2011 – сильный скачок швейцарского франка из-за привязки его к евро центральным банком Швейцарии,
- 2) 15.01.2015 – отмена предыдущего решения центрального банка Швейцарии,
- 3) 18.03.2015 – «Flash Crash» доллара,
- 4) 24.06.2016 – Падение фунта из-за голосования по «Brexit».

Таблица 1

Сформированные портфели

Портфель	aud	gbp	eur	cad	rub	chf	jpy
<i>prf_1</i>	0,09	0,30	0,12	0,07	0,04	0,29	0,09
<i>prf_2</i>	0,11	0,27	0,10	0,09	0,05	0,3	0,08
<i>prf_3</i>	0,09	0,28	0,09	0,10	0,05	0,25	0,14
<i>prf_4</i>	0,06	0,28	0,09	0,12	0,08	0,32	0,05
<i>prf_5</i>	0,10	0,30	0,16	0,08	0,00	0,28	0,08
<i>prf_6</i>	0,08	0,32	0,11	0,04	0,04	0,34	0,07
<i>prf_7</i>	0,14	0,34	0,09	0,04	0,07	0,28	0,04
<i>prf_8</i>	0,13	0,25	0,12	0,09	0,01	0,29	0,11
<i>prf_9</i>	0,11	0,28	0,10	0,09	0,09	0,19	0,14
<i>prf_10</i>	0,09	0,29	0,12	0,02	0,08	0,27	0,13

Источник: расчеты авторов.

Затем, для каждого портфеля строилась модель (5). Алгоритм, использованный для построения, описан выше. Для реализации алгоритма применялся язык программирования R с дистрибутивом RStudio. В *табл. 2* представлены оценки параметров модели FIEGARCH (p, d, q) для каждого портфеля (значения коэффициентов округлены до десятичных). Параметры p и q подбирались по критерию Акайке ($AIC=k - \ln(l)$), где k – число оцениваемых параметров, а l – значение функции правдоподобия).

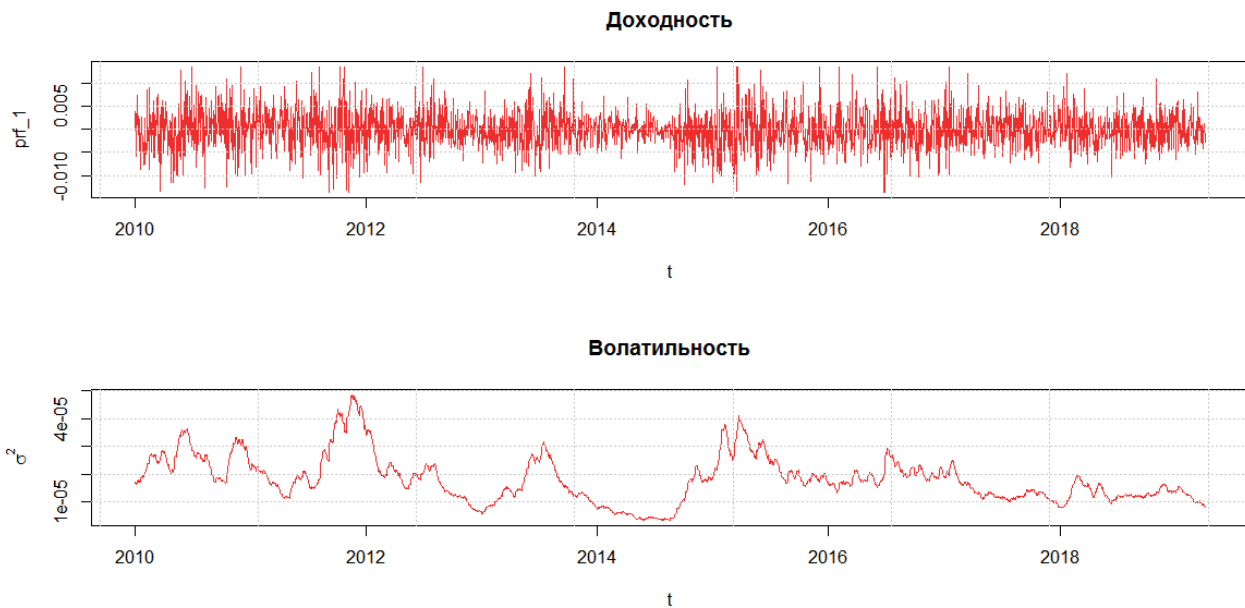
Таблица 2

Коэффициенты моделей, построенных по портфелям

Портфель	(p,q)	α_1	β_1	β_2	β_3	θ	γ	d
<i>prf_1</i>	(1,2)	0,5726 [0,3871]	1,0216* [0,328]	-0,1349 [0,3144]	-	-0,0110* [0,0048]	0,0389 [0,0125]	0,8342* [0,0368]
<i>prf_2</i>	(0,2)	-	-0,1651 [0,5607]	0,8250 [0,5755]	-	-0,0083 [0,0053]	0,0729* [0,0253]	0,8076* [0,0360]
<i>prf_3</i>	(0,2)	-	-0,1043 [0,4169]	0,8790* [0,4235]	-	-0,0097 [0,0076]	0,0372* [0,0176]	0,8255* [0,0317]
<i>prf_4</i>	(0,3)	-	-0,0988 [0,5618]	0,8100 [0,4604]	-0,0836 [0,5039]	-0,0068 [0,0085]	0,0537* [0,0178]	0,8350* [0,0431]
<i>prf_5</i>	(0,1)	-	0,8063* [0,3530]	-	-	-0,0079 [0,0092]	0,0254 [0,0234]	0,8426* [0,0317]
<i>prf_6</i>	(0,3)	-	0,6862 [0,5266]	0,5476 [0,5891]	-0,4171 [0,4974]	-0,0068 [0,0083]	0,0225 [0,0297]	0,8503* [0,0318]
<i>prf_7</i>	(0,2)	-	1,5700* [0,4914]	-0,6806* [0,3316]	-	-0,0039 [0,0062]	0,0136 [0,0034]	0,8599* [0,0307]
<i>prf_8</i>	(0,1)	-	0,8313* [0,3295]	-	-	-0,0065 [0,0061]	0,0245 [0,0134]	0,8376* [0,0278]
<i>prf_9</i>	(0,1)	-	0,8684* [0,3437]	-	-	-0,0054 [0,0062]	0,0226 [0,0278]	0,8302* [0,0300]
<i>prf_10</i>	(0,2)	-	-0,2728 [0,5221]	0,7161 [0,5166]	-	-0,0111* [0,0051]	0,0909* [0,0300]	0,8297* [0,0361]

Источник: расчеты авторов.

В квадратных скобках в *табл. 2* указаны стандартные отклонения для оцененных параметров, рассчитанные по методу бутстрапа с 1000 симуляций. Звездочкой отмечены значимые коэффициенты (на уровне значимости 5%), значимость определялась по бутстрапированным распределениям. Стоит добавить, что полученные распределения для параметра d не выходят за 1.



Источник: расчеты авторов.

Рис. 1. Графики доходностей и условной волатильности для *prf_1*

Под методом бутстрапа подразумевается следующая процедура (Juan, Lantz, 2001)¹:

- 1) оценка модели, получение оценок параметров ($\hat{\beta}$) и остатков (ε);
- 2) перемешивание ряда случайным образом и получение ε^* ;
- 3) подстановка $\hat{\beta}$ и ε^* в модель, восстановление нового оцениваемого ряда (y^*);
- 4) повторение шагов 1–3 N раз с целью получения необходимых статистик.

Для примера на рис. 1 представлен базовый портфель (*prf_1*) и его смоделированная волатильность (σ^2).

После построения моделей осуществлялся прогноз волатильности и $\text{VaR}^{0.99}$ на 1, 2, ..., 5 шагов вперед (одна торговая неделя) по алгоритму, описанному в пункте 3 (генерация доходностей происходила по методу бутстрапа с $N=2000$ – величина выборки, соизмеримая с длиной ряда данных – 2416). Уровень VaR в 99% брался из предположения о том, что крупный инвестор ведет себя консервативно при прогнозировании убытков.

В табл. 3 представлены прогнозные значения $\text{VaR}^{0.99}$ для каждого портфеля, а также реализованный $\text{VaR}^{0.99}$ за период.

Таблица 3
Прогнозный $\text{VaR}^{0.99}$

Портфель	VaR^*	VaR_{t+1}	VaR_{t+2}	VaR_{t+3}	VaR_{t+4}	VaR_{t+5}
prf_1	-0,0103	-0,0074	-0,0073	-0,0065	-0,0068	-0,0065
prf_2	-0,0104	-0,0064	-0,0063	-0,0066	-0,0061	-0,0059
prf_3	-0,0101	-0,0067	-0,0065	-0,0065	-0,0062	-0,0074
prf_4	-0,0108	-0,0066	-0,0069	-0,0067	-0,0069	-0,0063
prf_5	-0,0109	-0,0073	-0,0075	-0,0074	-0,0071	-0,0072
prf_6	-0,0107	-0,0065	-0,0069	-0,0064	-0,0066	-0,0071
prf_7	-0,0109	-0,0073	-0,0077	-0,007	-0,0069	-0,0069
prf_8	-0,0105	-0,0067	-0,0071	-0,007	-0,0068	-0,0067
prf_9	-0,0103	-0,0065	-0,0063	-0,0066	-0,008	-0,0067
prf_10	-0,0103	-0,0062	-0,0063	-0,0066	-0,0066	-0,0063

Примечание. Звездочкой обозначен реализованный VaR.

Источник: расчеты авторов.

¹ Juan S., Lantz F. (2001). "Application of Bootstrap Techniques in Econometrics: The Example of Cost Estimation in the Automotive Industry". Oil & Gas Science and Technology, 56(4).

Далее, чтобы показать обоснованность именно FIEGARCH (p, d, q) спецификации, приведем таблицу со сравнением данной спецификации с приведенными ранее спецификациями: ARCH (p), GARCH (p, q), EGARCH (p, q). Для сравнения моделей использовался последовательный прогноз на 5 дней вперед накопленным окном в течение года (прогнозы с 02.04.2018 по 05.04.2019, 53 торговые недели). Спецификации моделей (параметры p, q) подбирались по критерию Акайке. В качестве сравнительных метрик были выбраны следующие: in-sample метрика – информационный критерий Акайке (формула приведена выше), out-sample метрика – средняя абсолютная ошибка $MAE = \frac{1}{265} \sum_{i=1}^{53} \sum_{h=1}^5 |RV_{t+h} - \hat{\sigma}_{t+h}^2|$, где RV_{t+h} – сумма квадратов внутридневных доходностей портфеля по тикам Bloomberg (были взяты 15-минутные тики как самые короткие доступные для выгрузки), сформированного на день t+h, $\hat{\sigma}_{t+h}^2$ – прогноз волатильности на день t+h). Показатель RV_t для расчета средней абсолютной ошибки прогноза волатильности использовался, например, в работе Аганина (2017)¹. Горизонт в 5 дней был выбран из-за того, что дальнейшая процедура бакетинга и расчет прогнозных риск-метрик будут производиться на данном горизонте. В табл. 4 представлены средние оцененные метрики за весь период по каждому портфелю. Жирным цветом выделены наилучшие значения по портфелю в каждой метрике. Значения MAE умножены на 10000 для наглядности.

Таблица 4
Сравнение моделей

Портфель	Показатель	ARCH	GARCH	EGARCH	FIEGARCH
prf_1	Средний порядок	9,94	(1,38;1,38)	(3,08;4,89)	(0,6;2,15)
	Средний AIC	-9308,0	-9329,9	-9331,3	-9330,6
	Средний MAE	0,0549	0,0473	0,0519	0,0467
prf_2	Средний порядок	9,91	(1,23;1,23)	(3,21;4,77)	(0,58;2,06)
	Средний AIC	-9315,0	-9336,7	-9345,7	-9341,7
	Средний MAE	0,0535	0,0463	0,0498	0,0440
prf_3	Средний порядок	9,89	(1;1)	(2,92;4,89)	(0,19;1,87)
	Средний AIC	-9396,3	-9417	-9416,3	-9418,4
	Средний MAE	0,0512	0,0418	0,047	0,0423
prf_4	Средний порядок	9,94	(1;1)	(4,11;4,85)	(0,53;2,21)
	Средний AIC	-9307,9	-9330,5	-9334,1	-9340,0
	Средний MAE	0,0525	0,0447	0,0478	0,0437
prf_5	Средний порядок	9,98	(3,34;3,34)	(3;4,81)	(0,13;1,7)
	Средний AIC	-9268,7	-9290,4	-9290,1	-9287,4
	Средний MAE	0,0587	0,0487	0,0544	0,0496
prf_6	Средний порядок	9,92	(1,98;1,98)	(2,09;3,94)	(0,68;2,06)
	Средний AIC	-9251,1	-9335,1	-9274,5	-9276,1
	Средний MAE	0,058	0,0491	0,0524	0,0487
prf_7	Средний порядок	9,94	(1;1)	(3,42;4,45)	(0,3;2)
	Средний AIC	-9244,4	-9265,5	-9268,1	-9273,6
	Средний MAE	0,0579	0,0521	0,0542	0,0502
prf_8	Средний порядок	9,85	(1,98;1,98)	(3,09;4,85)	(0,42;1,94)
	Средний AIC	-9314,4	-9335,1	-9334,5	-9333,9
	Средний MAE	0,0562	0,0465	0,0507	0,0445
prf_9	Средний порядок	9,89	(1;1)	(2,72;4,06)	(0,38;1,85)
	Средний AIC	-9396,6	-9416,7	-9429,4	-9423,3
	Средний MAE	0,0502	0,0439	0,046	0,0429
prf_10	Средний порядок	9,96	(1,15;1,15)	(2,92;4,43)	(0,49;2,15)
	Средний AIC	-9322,7	-9344,8	-9347,0	-9349,0
	Средний MAE	0,0533	0,0456	0,0515	0,0458
Количество наилучших моделей	По среднему AIC	0	2	4	4
	По среднему MAE	0	3	0	7

Источник: расчеты авторов.

Исходя из результатов в табл. 4 можно сделать вывод о том, что последовательное усложнение модели от ARCH (p) до FIEGARCH (p, d, q) спецификации целесообразно с точки зрения выбранных метрик.

¹ Аганин А. Д. (2017). «Сравнение GARCH и HAR-RV моделей для прогноза реализованной волатильности на российском рынке». Прикладная Эконометрика, т. 48. С. 63–84.

Далее была проведена процедура бакетинга, описанная в пункте 4. В *табл. 5* представлены результаты бакетинга на каждый из прогнозов на 1, ..., 5 шагов вперед. Корзины варьируются от наименее рискованной (корзина 1) до наиболее рискованной.

Таблица 5

Результаты бакетинга

h	Корзина 1	Корзина 2	Корзина 3	Корзина 4	Корзина 5
1	prf_10	prf_2, prf_6, prf_9	prf_4, prf_3	prf_8	prf_5, prf_7, prf_1
2	prf_2, prf_9, prf_10, prf_3	prf_4, prf_6, prf_8	prf_1, prf_5	prf_7	
3	prf_6, prf_3, prf_1, prf_2, prf_9, prf_10	prf_4	prf_7, prf_8	prf_5	
4	prf_2, prf_3	prf_6, prf_10, prf_8, prf_1	prf_4	prf_7	prf_5, prf_9
5	prf_2, prf_10	prf_4, prf_1, prf_9, prf_8	prf_7, prf_6	prf_5, prf_3	

Источник: расчеты авторов.

Из результатов бакетинга видно, что наиболее рисковый портфель в прогнозе на 1 неделю определяется как prf_5, что закономерно, учитывая, что в нем большая относительно других портфелей доля евро и британского фунта (эти две валюты очень волатильны в последнее время). Prf_2, наоборот, чаще всего попадал в наименее рисковую корзину. Возможно, это объясняется тем, что в данной корзине большая доля австралийского доллара и японской йены, которые стабильны относительно курса доллара.

* * *

В данной работе было представлено моделирование волатильности доходностей портфелей валютных курсов на основе модели с длинной памятью – FIEGARCH (p, d, q). Были приведены: алгоритм получения оценок в моделях класса FIEGARCH; алгоритм прогноза процессов, построенных на данных моделях; сравнение нескольких моделей GARCH класса; методика сравнений прогнозных по FIEGARCH моделям риск-мер (VaR); результаты оценок и прогнозов, построенные на случайно сформированных портфелях.

Данная методика будет полезна инвесторам, держащим крупные средства в валютных активах и принимающим решения о тактическом размещении своих активов (относительно валют) один раз в прогнозируемый период. Например, если инвестор управляет крупным мультивалютным портфелем, состав которого и отклонения от этого состава определяются стратегическим решением раз в неделю, то тактическим решением инвестора будет выбор наиболее оптимального портфеля с точки зрения риска. В таком случае прогноз риск-мер и их сравнение будет хорошим численным подспорьем в принятии тактического решения.

Источники

1. Аганин А. Д. (2017). «Сравнение GARCH и HAR-RV моделей для прогноза реализованной волатильности на российском рынке». Прикладная Эконометрика, т. 48. С. 63–84.
2. Andersen T.G., Bollerslev T., Diebold F.X., Laybys P. (2001). “The distribution of realized exchange rate volatility”. Journal of the American Statistical Association, 96. P. 42–55.
3. Comotto R. (2012). “Haircuts and initial margins in the repo market”. ICMA European Repo Council.
4. Ding Z.C., Granger W.J., Engle R.F. (1993). “A long memory property of stock markets and a new model”. Journal of Empirical Finance, 1. P. 83–106.
5. Engle R.F. (1982). “Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with Estimates of Variance of U.K. Inflation”. Econometrica, 50. P. 987–1008.
6. Hurlin C., Laurent S., Quaedvlieg R., Smeekes S. (2015). “Risk Measure Inference”. Journal of Business and Economic Statistics, 35. P. 499–512.
7. Jayasuria, S.A. (2009). “A Sub Period Analysis of Long Memory in Stock Return Volatility for Emerging Markets”. Cambridge University, 9th Global Conference of Business and Economic Proceedings.

8. Juan S., Lantz F. (2001). "Application of Bootstrap Techniques in Econometrics: The Example of Cost Estimation in the Automotive Industry". *Oil & Gas Science and Technology*, 56(4).
9. Kallianiotis I.N. (2018). "How Efficient is the Foreign Exchange Market". *Athens Journal of Business and Economics*, vol. 4(3). P. 293–326.
10. Lopes S.R.C., Prass T.S (2013). "Theoretical Results on fractionally Integrated Exponential Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedastic Processes". *Mathematics Institute – UFRGS, Brazil*.
11. Nelson D.B. (1991). "Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A new Approach". *Econometrica*, 59. P. 347–370.
12. Pong S., Shackleton M.B., Taylor S.J. (2008). "Distinguishing short and long memory volatility specification". *The Economic Journal*, 11. P. 617–637.
13. Pong S.Y., Shackleton M.B., Taylor S.J., Xu X. (2004). "Forecasting currency volatility: A comparison of implied volatilities and AR(FI)MA models". *Journal of Banking and Finance*, 28, 2541-63.
14. Prass T.S. (2008). "Analise e Estimacao de Medidas de Risco em Processos FIEGARCH". Master Thesis in Mathematics, federal University of Rio Grande do Sul, Porto Alegre.
15. Ruiz E., Veiga H. (2008). "Modelling Long-Memory Volatilities with Leverage Effect: A-LMSV versus FIEGARCH". *Computational Statistics and Data Analysis*, 52. P. 2846–2862.
16. Taylor S.J. (1986). "Modelling Financial Time Series". *Wiley*.
17. Villar J., R. (2010). "Volatility Models with Leverage Effect". *Universidad Carlos III De Madrid, doctoral thesis*.
18. Xekalaki E., Degiannakis S. (1987). "ARCH Models for Financial Applications". *Wiley*. 