

Корректировка смещения для уменьшения искажения размера KPSS теста при наличии структурного сдвига*

Антон Скроботов[†]

Институт Экономической политики имени Е. Т. Гайдара,
Российская Академия Народного Хозяйства и Государственной Службы
при Президенте РФ

15 ноября 2012 г.

Аннотация

В этой статье мы обобщаем тест на стационарность, предложенный Kurozumi and Tanaka (2010), для уменьшения искажения размера на случай наличия структурного сдвига. Мы получаем смещение до порядка $1/T$ на конечных выборках для четырёх типов моделей, содержащих структурный сдвиг. Симуляции на конечных выборках показывают уменьшение искажения размера по сравнению с другими тестами, при этом получая высокую мощность.

Ключевые слова: Тест на стационарность, KPSS тест, корректировка смещения, искажение размера.

JEL: C12, C22

Введение

Тестирование временных рядов на наличие единичного корня является необходимым элементом анализа данных. Стандартным и наиболее распространённым подходом, идущим от работ Дики и Фуллера (Dickey and Fuller, 1979), является проверка гипотезы о наличии единичного корня во временных рядах. Но начиная с работы Kwiatkowski *et al.* (1992) (далее KPSS) получило развитие противоположное направление, в котором в качестве нулевой гипотезы выступает предположение о том, что временной ряд является стационарным около детерминированного тренда. Общей и одной из основных проблем во всех этих тестах является предположение о характере детерминированной компоненты.

В работах, начатых Perron (1989), было показано, что в обычных тестах на наличие единичного корня происходит существенное снижение мощности, если в данных присутствует

*We thank Eiji Kurozumi for providing his GAUSS code and for his helpful comments, and Marina Turuntseva for her helping in preparing this article.

[†]E-mail: antonskrobotov@gmail.com

структурный сдвиг в детерминированном тренде. Аналогичная проблема возникает и в тестах на стационарность, то есть при наличии структурного сдвига происходят серьёзные искажения размера. Соответственно, для решения этой проблемы появились исследования, рассматривающие тесты на стационарность при наличии структурных сдвигов.

Lee and Strazicich (2001) использовали аналог KPSS теста, рассматривая две модели: модель сдвига в уровнях и модель со сдвигом в уровнях с изменением наклона тренда. Если дата сдвига неизвестна, авторы вывели её оценку путём минимизации тестовой статистики. Однако было показано, что тест имеет низкую мощность, так как минимизация тестовой статистики приводит к наименее благоприятному исходу против альтернативы.

Kurozumi (2002) рассматривал локальную асимптотику KPSS-теста при наличии четырёх типов структурных сдвигов. Он получил предельные распределения тестовой статистики для каждой из рассмотренных моделей, функцию асимптотической локальной мощности (используя подход, изложенный в Tanaka (1996, chapter 9)) и исследовал мощность тестов в зависимости от местоположения сдвига. Он также предложил другой тест, предельное распределение которого не зависит от датировки сдвига. При неизвестной дате сдвига автор предложил использовать её оценку, полученную при минимизации сумм квадратов остатков.

В Busetti and Harvey (2001) была рассмотрена аналогичная проблема тестирования стационарности при фиксированной альтернативе. Авторы рассмотрели KPSS тесты для четырёх моделей и получили соответствующие предельные распределения и критические значения. Важно заметить, что Harvey and Mills (2003) обнаружили ошибку в итоговом распределении для модели сдвига в уровнях, хотя доказательство было корректным, и критические значения были получены, используя корректное распределение. Harvey and Mills (2003) предложили модификацию исходной KPSS-статистики, предельное распределение которой не зависит от датировки сдвига, и её обобщение на случай произвольного количества сдвигов.

Busetti and Harvey (2003) рассмотрели различные способы получения оценки даты сдвига, если она неизвестна. Тест Busetti and Harvey (2001) основывается на предположении небольших сдвигов (уменьшающаяся величина сдвигов при росте выборки), и дата сдвига вычисляется, используя минимизацию тестовой статистики. Тогда возникает естественный вопрос, насколько небольшим должен быть сдвиг, чтобы удовлетворять этому предположению, потому что при больших сдвигах происходит слишком частое отвержение нулевой гипотезы. Busetti and Harvey (2003) предлагают другую процедуру, которая имеет хорошие свойства размера, но теряет мощность при небольших сдвигах. Она заключается в том, чтобы предварительно оценить дату сдвига путём минимизации суммы квадратов остатков, а затем использовать обычную тестовую статистику, используя полученную оценку как истинную дату сдвига. Симуляции показали, что минимизация тестовой статистики слишком часто отвергает нулевую гипотезу стационарности даже для таких небольших размеров сдвига, как одно стандартное отклонение ошибок. Хотя для больших сдвигов эмпирический размер никогда не выше 0.17, размер теста, основанного на использовании суперсостоятельной оценки доли даты сдвига как истинной близок к номинальному при любой величине сдвига¹. Однако мощность теста мала для небольшого сдвига, но увеличивается с ростом его величины, то есть в ситуации, когда более легко идентифицировать сдвиг. Если сдвиг фактически не происходит, инфимум-тест является более мощным, чем тест, использующий состоятельную оценку доли даты сдвига, полученную путём минимизации суммы квадратов остатков. Таким образом, если существует неопределённость относительно наличия сдвига, то инфимум-тест являет-

¹ Это может не выполняться, если рассматривать локальную асимптотику.

ся предпочтительным. С другой стороны, если есть уверенность в том, что сдвиг существует, но его местоположение неясно, предпочтительнее использовать двухшаговую процедуру, при которой тестовая статистика строится для оцененной даты сдвига путём минимизации суммы квадратов остатков.

Carrion-i-Silvestre and Sansó (2005) рассмотрели возможность двух структурных сдвигов в KPSS-тесте. Авторы использовали подход Sul *et al.* (2005) (далее SPC) для оценки долгосрочной дисперсии. Для каждой из семи рассмотренных в работе моделей в работе было получено предельное распределение. Поиск неизвестных дат сдвигов проводился путём минимизации сумм квадратов остатков.

Ещё одна проблема KPSS тестов была рассмотрена, среди прочих, в Carrion-i-Silvestre and Sansó (2006). Они показали, что на конечных выборках SPC тест с $AR(1)$ коррекцией ширины окна ($AR(1)$ prewhitening) является предпочтительнее других, так как контролирует размер. Однако тест SPC с $AR(1)$ коррекцией имеет серьёзные искажения размера, когда процесс порождения данных (DGP) является $AR(2)$ процессом (или более высокого порядка). Kurozumi and Tanaka (2010) (далее КТ) расширили подход SPC (однако в случае отсутствия сдвигов), где для оценивания долгосрочной дисперсии использовали авторегрессионную аппроксимацию, используя граничное условие (boundary rule), предложенное SPC для гарантирования состоятельности долгосрочной дисперсии. Авторы также исследовали проблему смещения вниз числителя KPSS-статистики. Для корректировки размера они получили смещение на конечных выборках и предложили скорректированную на смещение версию KPSS статистик. Симуляции показали, что эмпирический размер модифицированного теста хорошо контролируется в случае $AR(2)$ ошибок, а также тест имеет более высокую мощность по сравнению с SPC.

В этой работе мы предлагаем обобщение теста КТ на случай единственного структурного сдвига. Используя модификацию граничного условия как в SPC с авторегрессионной аппроксимацией, мы находим смещение числителя тестовой статистики в случае наличия в DGP структурного сдвига. Если дата сдвига неизвестна, можно использовать её оценку, полученную через минимизацию сумм квадратов остатков. Однако можно улучшить эту оценку, используя подход Harvey and Leybourne (2012). Симуляции показывают превосходство полученной модификации теста при наличии структурного сдвига даже в случае MA ошибок.

Работа состоит из следующих частей. В разделе 1 описывается модель, тестовая статистика, граничное условие SPC с модификацией КТ и параметр смещения на конечных выборках числителя KPSS статистики при наличии структурного сдвига различных типов. В разделе 2 описываются возможные процедуры получения датировки структурного сдвига. В разделе 3 исследуются свойства на конечных выборках модифицированного теста. В заключении формулируются полученные результаты.

1 Модель

Как обычно, мы рассмотрим DGP согласно

$$y_t = d_t' \beta + u_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

где d_t — некоторая детерминированная функция времени, а процесс u_t может быть либо $I(0)$, либо $I(1)$, удовлетворяющий следующему стандартному предположению (см. также Phillips and Solo (1992)).

Предположение 1 Процесс u_t может быть либо $I(0)$, либо $I(1)$:

- если $u_t \sim I(0)$, то это – линейный процесс, такой что

$$u_t = \gamma(L)e_t = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma_i e_{t-i}$$

с $\gamma(z) \neq 0$ для всех $|z| \leq 1$ и $\sum_{i=0}^{\infty} i|\gamma_i| < \infty$, где e_t – мартингал-разность с условной дисперсией σ_e^2 и $\sup_t \mathbb{E}(e_t^4) < \infty$. Краткосрочная и долгосрочная дисперсия определяются как $\sigma_u^2 = \mathbb{E}(u_t^2)$ и $\omega_u^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} T^{-1} \mathbb{E} \left(\sum_{t=1}^T u_t \right)^2 = \sigma_e^2 \gamma(1)^2$, соответственно;

- если $u_t \sim I(1)$, то его можно представить как $u_t = \sum_{j=1}^t e_j$, где $e_t \sim I(0)$.

Также, как и в Реггон (1989), мы рассмотрим три типа моделей: Модель 0 (“изменение в уровнях”, или “модель краха”), соответственно с наличием или отсутствием тренда, Модель I (“модель изменения роста”) и Модель II (“совместный эффект”). Соответственно, детерминированная компонента d_t записывается тогда как:

$$d_t' = \begin{cases} (1, DU_t), & \text{для Модели 0} \\ (1, t, DU_t), & \text{для Модели 0t} \\ (1, t, DT_t), & \text{для Модели I} \\ (1, t, DU_t, DT_t), & \text{для Модели II} \end{cases}$$

где $DU_t = \mathbb{I}(t > T_1 + 1)$, $DT_t = (t - T_1)\mathbb{I}(t > T_1 + 1)$, $\mathbb{I}(\cdot)$ – индикатор-функция, принимающая знак 1, если выражение в скобках выполнено и 0 в противном случае, T_1 – дата структурного сдвига. Определим долю даты сдвига как $\lambda_1 = T_1/T$.

Мы тестируем нулевую гипотезу стационарности $u_t \sim I(0)$ против альтернативы $u_t \sim I(1)$. Обычно предлагается использовать следующую KPSS статистику для тестирования стационарности против альтернативы единичного корня:

$$KPSS(\lambda_1) = \frac{T^{-2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t \hat{u}_s \right)^2}{\hat{\omega}_u^2} \quad (2)$$

где $\hat{u}_t = y_t - d_t' \hat{\beta}$ – остатки от OLS-регрессии y_t на d_t , где $d_t = [1, DU_t]'$, $\beta = (\mu_0, \mu_1)'$ для Модели 0, $d_t = [1, t, DU_t]'$, $\beta = (\mu_0, \beta_0, \mu_1)'$ для Модели 0t, $d_t = [1, t, DT_t]'$, $\beta = (\mu_0, \beta_0, \beta_1)'$ для Модели I, $d_t = [1, t, DU_t, DT_t]'$, $\beta = (\mu_0, \beta_0, \mu_1, \beta_1)'$ для Модели II, а оценка долгосрочной дисперсии $\hat{\omega}_u^2$ строится согласно непараметрическому подходу используя ядро Бартлетта или QS.

Статистика (2) имеет следующее предельное распределение, полученное в Busetti and Harvey (2001) (с исправлениями в Harvey and Mills (2003)):

Лемма 1 При нулевой гипотезе

$$KPSS(\lambda_1) \Rightarrow \int_0^1 (W^*(r, \lambda_1))^2 dr,$$

где для Модели 0:

$$W^*(r, \lambda_1) = \begin{cases} W(r) - \frac{r}{\lambda_1} W(\lambda_1), & \text{для } r \leq \lambda_1; \\ (W(r) - W(\lambda_1)) - \frac{r-\lambda_1}{1-\lambda_1} (W(1) - W(\lambda_1)), & \text{для } r > \lambda_1 \end{cases};$$

для Модели 0t:

$$W^*(r, \lambda_1) = \begin{cases} \left(W(r) - \frac{r}{\lambda_1} W(\lambda_1) - \frac{6r(r-\lambda_1)}{1-3\lambda_1+3\lambda_1^2} \right) \times \left[\int_0^1 rdW(r) - \frac{\lambda_1}{2} W(\lambda_1) - \frac{1+\lambda_1}{2} (W(1) - W(\lambda_1)) \right], & \text{для } r \leq \lambda_1; \\ (W(r) - W(\lambda_1)) - \frac{r-\lambda_1}{1-\lambda_1} (W(1) - W(\lambda_1)) - \frac{6(r-1)(r-\lambda_1)}{1-3\lambda_1+3\lambda_1^2} \times \left[\int_0^1 rdW(r) - \frac{\lambda_1}{2} W(\lambda_1) - \frac{1+\lambda_1}{2} (W(1) - W(\lambda_1)) \right], & \text{для } r > \lambda_1 \end{cases};$$

для Модели I:

$$W^*(r, \lambda_1) = \begin{cases} \left(W(r) - rW(1) - \frac{3}{\lambda_1^3(1-\lambda_1)^3} \right) \times \left[\left(a\frac{r^2}{2} - a\lambda_1 r + \frac{r}{2}(a\lambda_1^2 - b(1-\lambda_1)^2) \right) J_1 + \left(b\frac{r^2}{2} - b\lambda_1 r + \frac{r}{2}(b\lambda_1^2 - c(1-\lambda_1)^2) \right) J_2 \right], & \text{для } r \leq \lambda_1; \\ \left(W(r) - rW(1) - \frac{3}{\lambda_1^3(1-\lambda_1)^3} \right) \times \left[\left(-a\frac{\lambda_1^2}{2} + b\frac{r^2-\lambda_1^2}{2} - b\lambda_1(r-\lambda_1) + \frac{r}{2}(a\lambda_1^2 - b(1-\lambda_1)^2) \right) J_1 + \left(-b\frac{\lambda_1^2}{2} + c\frac{r^2-\lambda_1^2}{2} - c\lambda_1(r-\lambda_1) + \frac{r}{2}(b\lambda_1^2 - c(1-\lambda_1)^2) \right) J_2 \right], & \text{для } r > \lambda_1 \end{cases};$$

для Модели II:

$$W^*(r, \lambda_1) = \begin{cases} \left(W(r) - \frac{r}{\lambda_1} W(\lambda_1) - \frac{6r(r-\lambda_1)}{\lambda_1^3} \right) \times \left[\int_0^{\lambda_1} rdW(r) - \frac{\lambda_1}{2} W(\lambda_1) \right], & \text{для } r \leq \lambda_1; \\ (W(r) - W(\lambda_1)) - \frac{r-\lambda_1}{1-\lambda_1} (W(1) - W(\lambda_1)) - \frac{6(r-1)(r-\lambda_1)}{(1-\lambda_1)^3} \times \left[\int_{\lambda_1}^1 rdW(r) - \frac{1+\lambda_1}{2} (W(1) - W(\lambda_1)) \right], & \text{для } r > \lambda_1 \end{cases};$$

Здесь $a = (1 - \lambda_1)^3(1 + \lambda_1)$, $b = -3\lambda_1^2(1 - \lambda_1)^2$, $c = \lambda_1^3(4 - 3\lambda_1)$, $J_1 = \int_0^{\lambda_1} rdW(r) - \lambda_1 W(\lambda_1) + \frac{\lambda_1^2}{2} W(1)$ и $J_2 = \int_{\lambda_1}^1 rdW(r) - \lambda_1 (W(1) - W(\lambda_1)) - \frac{(1-\lambda_1)^2}{2} W(1)$.

Мы можем асимптотически контролировать размер, однако на конечных выборках KPSS тест имеет серьёзные искажения размера. Для их уменьшения SPC предложили использовать $AR(1)$ коррекцию ширины окна долгосрочной дисперсии с граничным условием ($AR(1)$ prewhitening method with a boundary rule). То есть мы сначала оцениваем $AR(p)$ модель для остатков от регрессии (1), \hat{u}_t , то есть

$$\hat{u}_t = \varphi_1 \hat{u}_{t-1} + \dots + \varphi_p \hat{u}_{t-p} + e_t.$$

Тогда оценка долгосрочной дисперсии строится согласно

$$\hat{\omega}_u^2 = \frac{\hat{\omega}_e^2}{(1 - \tilde{\varphi})^2}, \quad (3)$$

где $\tilde{\phi} = \min \left\{ \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j, 1 - 1/\sqrt{T} \right\}$ и $\hat{\omega}_e$ – оценка долгосрочной дисперсии остатков \hat{e}_t^2 . КТ предлагают модификацию оценки СПС на случай авторегрессионной оценки долгосрочной дисперсии $\hat{\omega}_u^2$, то есть:

$$\hat{\omega}_{u,AR}^2 = \frac{\hat{\sigma}_e^2}{(1 - \tilde{\phi})^2}, \quad (4)$$

где $\hat{\sigma}_e = T^{-1} \sum_{t=1}^T \hat{e}_t^2$ и $\tilde{\phi} = \min \left\{ \sum_{j=1}^p \hat{\phi}_j, 1 - c/\sqrt{T} \right\}$, а c – некоторая конечная константа. Однако пока авторегрессионная оценка долгосрочной дисперсии применяется достаточно хорошо, возникает проблема смещения вниз числителя статистики (2) на конечных выборках. КТ показали для случая константы и тренда, что их модификация оценки долгосрочной дисперсии всё ещё приводит к слишком редкому отвержению нулевой гипотезы из-за этого смещения вниз, что приводит к существенной потере мощности при альтернативе. Для предотвращения смещения на конечных выборках в числителе KPSS статистики, КТ предлагают скорректированную на смещение версию KPSS статистики:

$$KPSS = \frac{T^{-2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t \hat{u}_s \right)^2 - \hat{b}_T}{\hat{\omega}_{u,AR}^2}. \quad (5)$$

Здесь компонента \hat{b}_T отвечает за смещение. Чтобы его вычислить, авторы предлагают использовать разложение Бевериджа-Нельсона. Пусть $u_t = \psi(L)e_t$, тогда процесс u_t можно записать как:

$$u_t = \psi(1)e_t + v_{t-1} - v_t,$$

где $v_t = \sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\psi}_j e_{t-j}$, $\tilde{\psi}_j = \sum_{i=j+1}^{\infty} \psi_i$. Остатки \hat{u}_t определяются как

$$\begin{aligned} \hat{u}_t &= u_t - d_t' \left(\sum_{t=1}^T d_t d_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^T d_t u_t \\ &= \psi(1)e_t + v_{t-1} - v_t - d_t' \left(\sum_{t=1}^T d_t d_t' \right)^{-1} \sum_{t=1}^T d_t (\psi(1)e_t + v_{t-1} - v_t) \\ &= \psi(1)\hat{e}_t - \widehat{\Delta v}_t, \end{aligned}$$

где \hat{e}_t и $\widehat{\Delta v}_t$ – остатки от регрессий e_t и Δv_t на d_t , соответственно. Тогда КТ раскладывают числитель статистики (2) на три компоненты:

²Для случая $AR(1)$ ошибок Carrion-i-Silvestre and Sansó (2006) показали, что размер теста, используя подход СПС с $AR(1)$ коррекцией, близок к номинальному и предпочтительнее других рассмотренных тестов, когда истинный DGP есть $AR(1)$ процесс, в то время как тест имеет либеральные искажения размера, если действительный DGP является $AR(2)$ процессом.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t \hat{u}_s \right)^2 &= \frac{\psi^2(1)}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t \hat{e}_s \right)^2 \\
&+ \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t \widehat{\Delta v}_s \right)^2 - \frac{2\psi(1)}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t \hat{e}_s \right) \left(\sum_{s=1}^t \widehat{\Delta v}_s \right) \\
&= \frac{\psi^2(1)}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t \hat{e}_s \right)^2 + R_1 - R_2.
\end{aligned}$$

Вторая и третья компоненты есть $o_p(1)$, в то время как первая компонента имеет невырожденное предельное распределение. Таким образом, смещение числителя зависит от R_1 и R_2 . КТ тогда определяют смещение в числителе как математическое ожидание $R_1 - R_2$ вплоть до $O(T^{-1})$. Это смещение обозначается как b_T :

$$\mathbb{E}[R_1 - R_2] = b_T + o(T^{-1}). \quad (6)$$

Теорема 1 Пусть $\gamma_0 = \mathbb{E}[v_t^2]$, лаговый полином $\varphi(L) = c(L)(1 - \rho L)$ и $\varphi'(1) = d\varphi(z)/dz|_{z=1}$. Тогда смещение b_T в числителе KPSS статистики (5) выражается как

$$b_T = \frac{b_0}{T} \left(\gamma_0 + \sigma_e^2 \frac{\varphi'(1)}{\varphi^3(1)} \right) \quad (7)$$

где $b_0 = 5/3$ для Модели 0, $b_0 = \frac{285\lambda_1^4 - 576\lambda_1^3 + 498\lambda_1^2 - 213\lambda_1 + 38}{30(1 - 3\lambda_1 + 3\lambda_1^2)^2}$ для Модели 0t, $b_0 = 7/6$ для Модели I и $b_0 = 19/15$ для Модели II³.

Примечание Заметим, что в случае Моделей 0, I и II смещение не зависит от датировки структурного сдвига. Однако это не так для Модели 0t.

Параметр γ_0 можно получить рекурсивно, решая уравнения Юла-Уокера (подробности см. в Kurozumi and Tanaka (2010, section 3.2)).

2 Случай с неизвестной датой сдвига

Тест, рассмотренный в предыдущих разделах, основывался на предположении, что дата сдвига известна априори. Однако во многих случаях она не может быть известна исследователю. Тогда можно заменить истинную дату сдвига её состоятельной оценкой. Тогда предельное распределение тестовой статистики останется тем же самым. Состоятельную оценку доли даты сдвига $\lambda_1 = T_1/T$ можно получить, минимизируя сумму квадратов остатков в модели по всем возможным датам сдвига. Можно показать, что эта оценка является суперсостоятельной и в случае $I(0)$, и в случае $I(1)$ (см., например, Perron and Zhu (2005)).

Альтернативная процедура нахождения неизвестной даты сдвига была предложена в Carrion-i Silvestre *et al.* (2009), используя предварительное (квази) GLS-детрендрование ряда y_t . Например, пусть оценивается следующая регрессия:

³КТ показали, что в случае константы $b_0 = 5/3$, а в случае тренда $b_0 = 19/15$.

$$y_t = X_t(\lambda_1)\phi + u_t, \quad (8)$$

где $X_t(\lambda_1)$ включает в себя все регрессоры, а ϕ — соответствующие параметры. Тогда GLS-оценка $\hat{\phi}$ вектора ϕ есть OLS-оценка вектора коэффициентов в уравнении

$$y_t^{\bar{\rho}} = X_t^{\bar{\rho}}(\lambda_1)\phi + u_t^{\bar{\rho}}, \quad (9)$$

где $y_t^{\bar{\rho}}$ принимает значения

$$y_1, (1 - \bar{\rho}L)y_2, \dots, (1 - \bar{\rho}L)y_T,$$

а $X_t^{\bar{\rho}}(\lambda_1)$ — значения

$$x_1, (1 - \bar{\rho}L)x_2, \dots, (1 - \bar{\rho}L)x_T$$

В (Carrion-i Silvestre, Kim and Perron, 2009) предлагается выбирать $\bar{\rho} = 1 + \bar{c}/T$ в зависимости от датировки структурного сдвига, так как мы априори не знаем порядок интегрированности ряда u_t . Тогда оценка доли даты сдвига будет равна:

$$\hat{\lambda}_1^{\bar{\rho}} = \arg \min_{\lambda_1 \in \Lambda(\epsilon)} S(\bar{\rho}, \lambda_1), \quad (10)$$

где $S(\bar{\rho}, \lambda_1)$ — сумма квадратов остатков в регрессии (9). Полученная оценка доли даты сдвига также будет суперсостоятельной и в $I(0)$, и в $I(1)$ случаях.

Harvey and Leybourne (2012) предложили модификацию этой оценки даты сдвига, используя дополнительную информацию, если ряд является $I(1)$. В этом случае оценка доли даты сдвига, полученная при GLS-детрендровании, будет также состоятельной, но эффективной будет оценка, полученная при минимизации модели, оцененной в первых разностях. Авторы предлагают использовать гибридную оценку:

$$\hat{\lambda}_1^{D_m} = \arg \min_{\lambda_1 \in \Lambda(\epsilon), \bar{\rho} \in D_m} S(\bar{\rho}, \lambda_1), \quad (11)$$

где $D_m = \{\rho'_1, \rho'_2, \dots, \rho'_{m-1}, 1\}$ — m -элементное множество, в котором $|\rho'_i| < 1$ для любого i и, без потери общности, $-1 < \rho'_1 < \rho'_2 < \dots < \rho'_{m-1} < 1$.

Асимптотические результаты показали, что необходимо установить ρ'_{m-1} достаточно близко к единице, чтобы оценка (11) имела требуемые асимптотические свойства (если действительное значение $\rho > \rho'_{m-1}$, то оценка доли даты сдвига будет неэффективной). В качестве D_m авторы предлагают использовать $D_m = \{0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0.9, 0.95, 0.975, 1\}$. Причина заключается в том, что отрицательная серийная корреляция обычно не наблюдается на практике, а также что серийная корреляция часто может быть строго положительная, поэтому включение значения 0.975 допускает малый интервал $0.975 < \rho < 1$ для неадекватного асимптотического выбора.

Полученную оценку доли даты сдвига мы будем использовать далее. Заметим также, что так как оценка доли даты сдвига состоятельна, можно использовать те же самые критические значения (полученные Busetti and Harvey (2001) или Kurozumi (2002)), что и при известной датировке сдвига.

3 Свойства на конечных выборках

В этом разделе мы исследуем поведение тестов на конечных выборках через симуляции. Мы рассмотрим следующий DGP:

$$y_t = d_t' \beta + u_t, \quad u_t = \alpha u_{t-1} + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}, \quad (12)$$

то есть мы допускаем МА составляющую в DGP. Также $\varepsilon_t \sim i.i.d. N(0, 1)$. Мы рассматриваем значения параметра α от 0.5 до 1, значения параметра θ в МА компоненте — $\{-0.8, -0.4, 0.0, 0.4, 0.8\}$, долю даты структурного сдвига $\lambda_1 = 0.5$. Параметры детерминированной компоненты — $\mu_0 = 0$ без потери общности, $\mu_1 = -4$, $\beta_0 = 0.3$, $\beta_1 = -0.1$. Уровень значимости — 0.05, число повторений — 5,000. Начальное значение u_0 устанавливается равным 0.

Мы рассматриваем поведение четырёх тестов. Первый — скорректированный на смещение KPSS тест, полученный нами при наличии структурного сдвига в Разделе 1 (на графиках обозначен как BC). Второй — SPC тест с $AR(1)$ коррекцией (обозначен как SPC). Также для сравнения мы рассматриваем KPSS тест при отсутствии корректирующего параметра \hat{b}_T (обозначен как NC), а также тест KPSS при наличии структурного сдвига с предложенной Kurozumi (2002) шириной окна:

$$l_{Ak} = \min \left\{ 1.447 \left(\frac{\hat{\alpha}^2 T}{(1 + \hat{\alpha})^2 (1 - \hat{\alpha})^2} \right)^{1/3}, 1.447 \left(\frac{4k^2 T}{(1 + k)^2 (1 - k)^2} \right)^{1/3} \right\}.$$

с $k = 0.8$ (обозначен как K). Во всех случаях количество лагов выбирается согласно BIC.

Рисунок 1 показывает размер и мощность рассмотренных тестов для Модели II (результаты для других моделей доступны по запросу), предполагая дату сдвига известной ($\lambda_1 = 0.5$) и граничное значение равным $1 - c/\sqrt{T} = 0.8$. Данное значение предполагает, что при α более, чем 0.8 нулевая гипотеза будет иметь тенденцию отвергаться чаще, если $\theta = 0$. Если $\theta \neq 0$, то мера инерционности должна основываться на авторегрессионном представлении ряда. В нашей $ARMA(1, 1)$ перепишем DGP для u_t как

$$(1 - \alpha L)(1 - \theta L)^{-1} u_t = \varepsilon_t$$

Тогда мера инерционности $\varphi_1 + \dots + \varphi_p$ будет $(\alpha - \theta)/(1 - \theta)$. Мы ожидаем, что нулевая гипотеза будет отвергаться чаще, чем номинальный размер, если эта мера инерционности будет большей, чем 0.8. То есть на Рисунке 1 скорректированный на смещение KPSS тест должен иметь корректный размер при $\alpha < 0.64$ и слишком часто отвергать нулевую гипотезу в противном случае для $\theta = -0.8$. Для $\theta = -0.4$, $\theta = 0.4$ и $\theta = 0.8$ тест должен иметь корректный размер при $\alpha < 0.72$, $\alpha < 0.88$ и $\alpha < 0.96$, соответственно. Для $\theta = -0.8$, $\theta = -0.4$ и $\theta = 0$ это подтверждается результатами на Рисунке 1, в то время как для $\theta = 0.4$ и $\theta = 0.8$ тест начинает чаще отвергаться для меньших значений α , поскольку граничное значение слишком высоко.

В случае $\theta = -0.8$ и $\theta = -0.4$ полученный скорректированный на смещение тест имеет размер, ближе к номинальному, чем у остальных тестов. Для $\theta = -0.8$ ни один из тестов не имеет мощность, выше, чем у скорректированного на смещение теста. С другой стороны, для случая $\theta = -0.4$ появляются некоторые искажения размера для $\alpha > 0.7$, что приводит к более высокой мощности по сравнению с нескорректированным тестом. В случае обычного $AR(1)$ процесса результаты аналогичны известным, например, Carrion-i-Silvestre and Sansó (2005). Здесь скорректированный тест явно превосходит по размеру и мощности другие. При

отрицательной МА компоненте тест, предложенный Kurozumi (2002) имеет более высокую мощность одновременно с более высоким размером (для всех значений θ этот тест характеризуется либеральными искажениями размера). Однако скорректированный на смещение тест хотя и имеет более низкую мощность, хорошо контролирует размер.

Результаты для других значений граничного условия аналогичны и опущены для краткости. Можно заметить, что для более высоких значений превосходство скорректированного теста более заметно, хотя он и имеет более низкую мощность (для других тестов искажение размера увеличиваются), а для более низких значений наблюдается более высокая мощность, которая компенсируется искажениями размера после значения граничного условия.

Рисунок 2 показывает размер и мощность тестов при неизвестной дате сдвига, оцененной при использовании процедуры Harvey and Leybourne (2012). Как видно, результаты практически не изменились и качественно аналогичны.

Заключение

В данной работе мы рассмотрели обобщение теста Kurozumi and Tanaka (2010) на случай единственного структурного сдвига. Используя модификацию boundary rule в SPC с авторегрессионной аппроксимацией, мы нашли смещение числителя тестовой статистики в случае наличия в DGP структурного сдвига. Результаты аналогичны случаю отсутствия структурного сдвига. В симуляциях был рассмотрен случай неизвестной даты сдвига, используя подход, предложенный Harvey and Leybourne (2012). Симуляции показывают превосходство полученной модификации теста при наличии структурного сдвига, так как тест лучше контролирует размер. Поэтому использование корректировки смещения KPSS теста полезно в эмпирических приложениях.

А Приложение

Доказательство Теоремы 1⁴. Рассмотрим самый общий случай, когда $d'_t = (1, t, DU_t, DT_t)$. Как в КТ, разложим R_1 на три компоненты:

$$R_1 = R_{11} - R_{12} + R_{13},$$

где

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t \Delta v_s \right)^2 \\ R_{12} &= -\frac{2}{T^2} \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t \Delta v_s \sum_{s=1}^t d'_s \right) \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t \\ R_{13} &= \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \Delta v_t d'_t \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t d_s \sum_{s=1}^t d'_s \right) \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t. \end{aligned}$$

⁴Некоторые матричные вычисления (умножение, обращение) выполнены, используя Wolfram Mathematica 8.

Заметим, что $\sum_{s=1}^t \Delta v_s = v_t - v_0$, тогда (см. КТ):

$$\mathbb{E}[R_{11}] = \frac{2}{T} \gamma_0 + O(T^{-2}). \quad (13)$$

Вторая компонента выражается как:

$$\mathbb{E}[R_{12}] = \frac{2}{T^2} tr \left\{ \left(\sum_{t=1}^T d_t d_t' \right)^{-1} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t \right) \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t \Delta v_s \sum_{s=1}^t d_s' \right) \right] \right\} \quad (14)$$

Для дальнейшего доказательства мы используем следующие результаты:

$$\sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^T \Delta v_t \\ \sum_{t=1}^T t \Delta v_t \\ \sum_{t=1}^T DU_t \Delta v_t \\ \sum_{t=1}^T DT_t \Delta v_t \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} v_T - v_0 \\ (T+1)v_T - v_0 - \sum_{t=1}^T v_t \\ v_T - v_{T_1} \\ (T+1-T_1)v_T - v_{T_1} - \sum_{t=T_1+1}^T v_t \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$$\left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t \Delta v_s \sum_{s=1}^t d_s' \right) = \begin{pmatrix} \sum_{t=1}^T t(v_t - v_0) \\ \sum_{t=1}^T (v_t - v_0) \sum_{s=1}^t s \\ \sum_{t=1}^T (v_t - v_0) \sum_{s=1}^t DU_s \\ \sum_{t=1}^T (v_t - v_0) \sum_{s=1}^t DT_s \end{pmatrix}' \quad (16)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t DU_s = \frac{T^2(1-\lambda_1)^2}{2} + o(T^2) \quad (17)$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t DT_s = \frac{T^3(1-\lambda_1)^3}{3} + o(T^3) \quad (18)$$

$$\sum_{t=1}^T t DU_t = \frac{(T+T_1+1)(T-T_1)}{2} \quad (19)$$

$$\sum_{t=1}^T t DT_t = \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(2T+T_1+1)}{6} \quad (20)$$

$$\sum_{t=1}^T DT_t DT_t = \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(2T-2T_1+1)}{6} \quad (21)$$

Используя (19)-(21) можно показать, что

$$\sum_{t=1}^T d_t d_t' = \begin{pmatrix} T & \frac{T(T+1)}{2} & T-T_1 & \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)}{2} \\ \frac{T(T+1)}{2} & \frac{T(T+1)(2T+1)}{6} & \frac{(T-T_1)(T+T_1+1)}{2} & \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(2T+T_1+1)}{6} \\ T-T_1 & \frac{(T-T_1)(T+T_1+1)}{2} & T-T_1 & \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)}{2} \\ \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)}{2} & \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(2T+T_1+1)}{6} & \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)}{2} & \frac{(2T-2T_1+1)(T-T_1)(T-T_1+1)}{6} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Тогда

$$\left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2(2T_1+1)}{(T_1-1)T_1} & -\frac{6}{(T_1-1)T_1} & \frac{2}{T_1} & \frac{6}{(T_1-1)T_1} \\ -\frac{6}{(T_1-1)T_1} & \frac{12}{(T_1-1)T_1(T_1+1)} & -\frac{6}{T_1(T_1+1)} & -\frac{12}{(T_1-1)T_1(T_1+1)} \\ \frac{2}{T_1} & -\frac{6}{T_1(T_1+1)} & \frac{2T(2TT_1-T-2T_1^2+2T_1+1)}{T_1(T_1+1)(T-T_1-1)(T-T_1)} & \frac{6T(T-2T_1-1)}{T_1(T_1+1)(T-T_1-1)(T-T_1)} \\ \frac{6}{(T_1-1)T_1} & -\frac{12}{(T_1-1)T_1(T_1+1)} & \frac{6T(T-2T_1-1)}{T_1(T_1+1)(T-T_1-1)(T-T_1)} & \frac{12T(T^2-3TT_1+3T_1^2-1)}{(T_1-1)T_1(T_1+1)(T-T_1-1)(T-T_1)(T-T_1+1)} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Рассмотрим математическое ожидание в правой части (14), используя (15) и (16). Математическое ожидание (1,1) элемента равно (см. КТ):

$$\mathbb{E}[(1,1) \text{ элемент}] = \frac{T^2}{2} \gamma_0 + o(T^2), \quad (24)$$

Аналогично для (1,2) элемента (см. КТ):

$$\mathbb{E}[(1,2) \text{ элемент}] = \frac{T^3}{6} \gamma_0 + o(T^3), \quad (25)$$

Рассмотрим (1,3) элемент.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(1,3) \text{ элемент}] &= \mathbb{E} \left[(v_T - v_0) \sum_{t=1}^T (v_t - v_0) \sum_{s=1}^t DU_s \right] \\ &= \sum_{t=1}^T \gamma_{T-t} \sum_{s=1}^t DU_s - \gamma_T \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t DU_t - \sum_{t=1}^T \gamma_t \sum_{s=1}^t DU_t + \gamma_0 \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t DU_t \\ &= \frac{T^2(1-\lambda_1)^2}{2} \gamma_0 + o(T^2), \end{aligned} \quad (26)$$

так как γ_t абсолютно суммируемы и $\gamma_T = o(1)$, а также используя уравнение (17). Аналогично математическое ожидание (1,4) элемента (мы используем уравнение (18)):

$$\mathbb{E}[(1,4) \text{ элемент}] = \frac{T^3(1-\lambda_1)^3}{6} \gamma_0 + o(T^3). \quad (27)$$

Согласно КТ, (2,1) и (2,2) элементы есть $o(T^3)$ и $o(T^4)$, соответственно. Ясно, что (2,3) и (2,4) элементы имеют тот же самый порядок $o(T^3)$ и $o(T^4)$, соответственно, так как DU_t и DT_t имеют тот же самый порядок, что и константа и тренд, соответственно.

Элементы 3-й строки матрицы отличаются тем, что в соответствующих выражениях γ_0 заменяется на γ_{T_1} , но так как $T_1 > p$, то $\gamma_{T_1} = o(1)$. Тогда элементы 3-й строки есть $o(T^2)$, $o(T^3)$, $o(T^2)$, $o(T^3)$. Элементы 4-й строки равны соответствующим элементам 2-й строки, так как имеют тот же порядок. Следовательно, можно записать математическое ожидание как:

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t \right) \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t \Delta v_s \sum_{s=1}^t d'_s \right) \right] = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \gamma_0 + o(T^2) & \frac{T^3}{6} \gamma_0 + o(T^3) & \frac{T^2(1-\lambda_1)^2}{2} \gamma_0 + o(T^2) & \frac{T^3(1-\lambda_1)^3}{6} \gamma_0 + o(T^3) \\ o(T^3) & o(T^4) & o(T^3) & o(T^4) \\ o(T^2) & o(T^3) & o(T^2) & o(T^3) \\ o(T^3) & o(T^4) & o(T^3) & o(T^4) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Затем, используя (23) и (28), получим:

$$\mathbb{E}[R_{12}] = 2 \frac{-\lambda_1^2 \gamma_0 + 3\lambda_1^3 \gamma_0 - 3\lambda_1^4 \gamma_0 + \lambda_1^5 \gamma_0}{T(\lambda_1 - 1)^3 \lambda_1^2} + o(T^{-1}) = \frac{2}{T} \gamma_0 + o(T^{-1}). \quad (29)$$

Рассмотрим теперь третью компоненту R_{13} :

$$\mathbb{E}[R_{13}] = \frac{1}{T^2} \text{tr} \left\{ \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t d_s \sum_{s=1}^t d'_s \right) \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t \sum_{t=1}^T \Delta v_t d'_t \right] \right\}. \quad (30)$$

Можно показать, используя (15) и тот факт, что γ_{T_1} и γ_{T-T_1} есть $o(1)$, что:

$$\mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t \sum_{t=1}^T \Delta v_t d'_t \right] = \begin{pmatrix} 2\gamma_0 + o(1) & T\gamma_0 + o(T) & \gamma_0 + o(1) & T(1-\lambda_1)\gamma_0 + o(T) \\ T\gamma_0 + o(T) & T^2\gamma_0 + o(T^2) & T\gamma_0 + o(T) & T^2(1-\lambda_1)\gamma_0 + o(T^2) \\ \gamma_0 + o(1) & T\gamma_0 + o(T) & 2\gamma_0 + o(1) & T(1-\lambda_1)\gamma_0 + o(T) \\ T(1-\lambda_1)\gamma_0 + o(T) & T^2(1-\lambda_1)\gamma_0 + o(T^2) & T(1-\lambda_1)\gamma_0 + o(T) & T^2(1-\lambda_1)^2\gamma_0 + o(T^2) \end{pmatrix} \quad (31)$$

Рассмотрим компоненту $DD := \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t d_s \sum_{s=1}^t d'_s \right) \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1}$. Можно показать, что

$$\left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t d_s \sum_{s=1}^t d'_s \right) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4),$$

где

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \frac{T(T+1)(2T+1)}{6} \\ \frac{T(T+1)(T+2)(3T+1)}{24} \\ \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(2T+T_1+1)}{24} \\ \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(T-T_1+2)(3T+T_1+1)}{24} \end{pmatrix},$$

$$\xi_2 = \begin{pmatrix} \frac{T(T+1)(T+2)(3T+1)}{24} \\ \frac{T(T+1)(T+2)(3T^2+6T+1)}{60} \\ \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(3T^2+2TT_1+7T+T_1^2+3T_1+2)}{120} \\ \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(T-T_1+2)(6T^2+3TT_1+12T+T_1^2+3T_1+2)}{120} \end{pmatrix},$$

$$\xi_3 = \left(\begin{array}{c} \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(2T+T_1+1)}{6} \\ \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(3T^2+2TT_1+7T+T_1^2+3T_1+2)}{(2T-2T_1+1)(T-T_1)(T-T_1+1)} \\ \frac{(2T-2T_1+1)(T-T_1)(T-T_1+1)}{(3T-3T_1+1)(T-T_1)(T-T_1+1)(T-T_1+2)} \\ \frac{6}{24} \end{array} \right),$$

$$\xi_4 = \left(\begin{array}{c} \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(T-T_1+2)(3T+T_1+1)}{24} \\ \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(T-T_1+2)(6T^2+3TT_1+12T+T_1^2+3T_1+2)}{(3T-3T_1+1)(T-T_1)(T-T_1+1)(T-T_1+2)} \\ \frac{120}{24} \\ \frac{(T-T_1)(T-T_1+1)(T-T_1+2)(3T^2-6TT_1+6T+3T_1^2-6T_1+1)}{60} \end{array} \right),$$

Таким образом, используя (23),

$$DD = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4), \quad (32)$$

где

$$\kappa_1 = \left(\begin{array}{c} \frac{15TT_1^2-15TT_1+2T_1^3+22T_1^2-8T_1+2}{15(T_1-1)T_1} \\ -\frac{11T_1^2-5T_1+6}{10(T_1-1)T_1} \\ -\frac{10(T_1-1)T_1}{(T_1-2)(T_1+2)} \\ -\frac{30T_1}{(T_1+2)(T_1+3)} \\ \frac{10(T_1-1)T_1}{10(T_1-1)T_1} \end{array} \right),$$

$$\kappa_2 = \left(\begin{array}{c} -\frac{11T_1^2-5T_1+6}{10(T_1-1)T_1} \\ \frac{6(T_1^2+1)}{5(T_1-1)T_1(T_1+1)} \\ -\frac{5(T_1-1)T_1(T_1+1)}{(T_1-3)(T_1-2)} \\ -\frac{10T_1(T_1+1)}{6(T_1^2+1)} \\ -\frac{6(T_1^2+1)}{5(T_1-1)T_1(T_1+1)} \end{array} \right),$$

$$\kappa_3 = \left(\begin{array}{c} -\frac{(T_1-2)(T_1+2)}{30T_1} \\ -\frac{(T_1-3)(T_1-2)}{10T_1(T_1+1)} \\ \frac{2T(T^2T_1^2+T^2T_1-2TT_1^3-3TT_1^2+7TT_1-T+T_1^4+2T_1^3-7T_1^2+2T_1+1)}{15T_1(T_1+1)(T-T_1-1)(T-T_1)} \\ \frac{3T(TT_1-T-T_1^2+2T_1+1)}{5T_1(T_1+1)(T-T_1-1)(T-T_1)} \end{array} \right),$$

$$\kappa_4 = \left(\begin{array}{c} \frac{(T_1+2)(T_1+3)}{10(T_1-1)T_1} \\ \frac{6(T_1^2+1)}{5(T_1-1)T_1(T_1+1)} \\ -\frac{3T(TT_1-T-T_1^2+2T_1+1)}{5T_1(T_1+1)(T-T_1-1)(T-T_1)} \\ \frac{6T(T^2T_1^2+T^2-2TT_1^3-4TT_1+T_1^4+4T_1^2-1)}{5(T_1-1)T_1(T_1+1)(T-T_1-1)(T-T_1)(T-T_1+1)} \end{array} \right),$$

В итоге мы получаем, что

$$\mathbb{E}[R_{13}] = \frac{19}{15T}\gamma_0 + o(T^{-1}); \quad (33)$$

Таким образом, объединяя (13), (29) и (33), получим

$$\mathbb{E}[R_1] = \frac{19}{15T}\gamma_0 + o(T^{-1}). \quad (34)$$

Рассмотрим теперь математическое ожидание R_2 . R_2 раскладывается на четыре компоненты (см. КТ), за исключением скаляра $2\psi(1)/T^2$:

$$R_2 = R_{21} - R_{22} - R_{23} + R_{24}, \quad (35)$$

где

$$\begin{aligned} R_{21} &= \sum_{t=1}^t \sum_{s=1}^T e_s \sum_{s=1}^t \Delta v_s \\ R_{22} &= \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t \Delta v_s \sum_{s=1}^t d'_s \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \sum_{t=1}^T d_t e_t \\ R_{23} &= \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t e_s \sum_{s=1}^t d'_s \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t \\ R_{24} &= \sum_{t=1}^T e_t d'_t \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t d_s \sum_{s=1}^t d'_s \right) \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t \end{aligned}$$

Математическое ожидание первой компоненты есть (см. КТ):

$$\mathbb{E}[R_{21}] = \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(1 - \frac{t}{T} \right) \tilde{\psi}_t \quad (36)$$

Рассмотрим вторую компоненту:

$$\mathbb{E}[R_{22}] = tr \left\{ \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \mathbb{E} \left[\sum_{t=1}^T d_t e_t \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t \Delta v_s \sum_{s=1}^t d'_s \right] \right\}. \quad (37)$$

Далее мы используем лемму, приведённую в КТ, с некоторыми обобщениями для дамми переменных:

Лемма 2 Пусть f_t и g_t – детерминированные последовательности для $t = 1, \dots, T$. Тогда

$$E \left[\left(\sum_{t=1}^T f_t e_t \right) \left(\sum_{t=1}^T g_t v_t \right) \right] = \sigma_e^2 \sum_{t=0}^{T-1} \left(\sum_{s=1}^{T-t} f_s g_{s+t} \right) \tilde{\psi}_t, \quad (38)$$

$$E \left[\left(\sum_{t=1}^T f_t e_t \right) \left(\sum_{t=1}^T g_t \Delta v_t \right) \right] = \sigma_e^2 \sum_{t=0}^{T-1} \left(\sum_{s=1}^{T-t} f_s g_{s+t} - \sum_{s=1}^{T-t-1} f_s g_{s+t+1} \right) \tilde{\psi}_t, \quad (39)$$

$$\sum_{t=1}^T f_t \sum_{s=1}^t e_s = \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=t}^T f_s \right) e_t \quad (40)$$

Кроме того, так как f_t может быть дамми переменной, принимающей значения 0 до момента T_1 , поэтому для удобства необходимо преобразовать (40) следующим образом:

$$\sum_{t=1}^T f_t \sum_{s=1}^t e_s = \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=T_1+1}^T f_s \right) e_t - \sum_{t=1}^T \left(\sum_{s=1}^t f_{s-1}^b \right) e_t, \quad (41)$$

где выражение в скобках второго слагаемого в правой части является дамми-переменной (обозначена верхним индексом b , суммирование по всем t эквивалентно суммированию с момента $T_1 + 1$), в то время как выражение $\left(\sum_{s=T_1+1}^T f_s \right)$ в первом слагаемом является константой и не зависит от t .

Используя (38) (см. КТ), получим следующие элементы в математическом ожидании правой части (37):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(1, 1) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{T^2}{2} - \frac{t^2}{2} \right) \tilde{\psi}_t + O(T) \\
\mathbb{E}[(1, 2) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{T^3}{6} - \frac{t^3}{6} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(2, 1) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{tT^2}{2} + \frac{T^3}{3} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(2, 2) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t^4}{24} - \frac{tT^3}{6} + \frac{T^4}{8} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^3) \\
\mathbb{E}[(3, 1) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{T^2}{2} - \frac{1}{2}(t + \lambda_1 T)^2 \right) \tilde{\psi}_t + O(T) \\
\mathbb{E}[(3, 2) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{T^3}{6} - \frac{1}{6}(t + \lambda_1 T)^3 \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(4, 1) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(-\frac{1}{2}T^2(t + \lambda_1 T) + \frac{1}{6}(t + \lambda_1 T)^3 + \frac{T^3}{3} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(4, 2) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(-\frac{1}{6}T^3(t + \lambda_1 T) + \frac{1}{24}(t + \lambda_1 T)^4 + \frac{T^4}{8} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^3) \\
\mathbb{E}[(1, 3) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2}(1 - \lambda_1)^2 T^2 \right) \tilde{\psi}_t + O(T) \\
\mathbb{E}[(1, 4) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{6}(1 - \lambda_1)^3 T^3 \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(2, 3) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{6}(1 - \lambda_1)^2 (\lambda_1 + 2) T^3 - \frac{1}{2}(1 - \lambda_1)^2 t T^2 \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(2, 4) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{24}(1 - \lambda_1)^3 (\lambda_1 + 3) T^4 - \frac{1}{6}(1 - \lambda_1)^3 t T^3 \right) \tilde{\psi}_t + O(T^3) \\
\mathbb{E}[(3, 3) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2}(1 - \lambda_1)^2 T^2 - \frac{t^2}{2} \right) \tilde{\psi}_t + O(T) \\
\mathbb{E}[(3, 4) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{6}(1 - \lambda_1)^3 T^3 - \frac{t^3}{6} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(4, 3) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{1}{2}(1 - \lambda_1)^2 t T^2 + \frac{1}{3}(1 - \lambda_1)^3 T^3 \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(4, 4) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t^4}{24} - \frac{1}{6}(1 - \lambda_1)^3 t T^3 + \frac{1}{8}(1 - \lambda_1)^4 T^4 \right) \tilde{\psi}_t + O(T^3)
\end{aligned}$$

Используя (23), получим итоговое выражение для математического ожидания второй компоненты:

$$\mathbb{E}[R_{22}] = \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{2} \left(1 + f_1 \frac{t}{T} + f_2 \frac{t^2}{T^2} + f_3 \frac{t^4}{T^4} \right) \tilde{\psi}_t + O(1), \quad (42)$$

где f_1 , f_2 и f_3 — некоторые функции, которые могут зависеть только от λ_1 .

Рассмотрим компоненту R_{23} :

$$\mathbb{E}[R_{23}] = \text{tr} \left\{ \left(\sum_{t=1}^T d_t d'_t \right)^{-1} \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t \right) \left(\sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t e_s \sum_{s=1}^t d'_s \right) \right] \right\}. \quad (43)$$

Используя (40) и (41), можно показать, что:

$$\begin{aligned} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^t e_s \sum_{s=1}^t d'_s &= \left[\sum_{t=1}^T \left(\frac{T^2 - t^2}{2} + O(T) \right) e_t, \right. \\ &\sum_{t=1}^T \left(\frac{T^3 - t^3}{6} + O(T^2) \right) e_t, \sum_{t=1}^T \left(\frac{T^2(1 - \lambda_1)^2}{2} + O(T) \right) e_t - \sum_{t=1}^T \left(\frac{(t - \lambda_1 T)^2}{2} + O(T) \right) e_t, \\ &\left. \sum_{t=1}^T \left(\frac{T^3(1 - \lambda_1)^3}{6} + O(T^2) \right) e_t - \sum_{t=1}^T \left(\frac{(t - \lambda_1 T)^3}{6} + O(T^2) \right) e_t, \right]. \quad (44) \end{aligned}$$

Заметим, что в третьем и четвёртом элементах вторые слагаемые равны 0 до момента T_1 , то есть являются дамми-переменными. Поэтому вычисление внутренней суммы в (38) и (39) производится, учитывая этот факт.

Затем, используя (39) получим следующие элементы математического ожидания правой части выражения (42):

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(1, 1) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(tT - \frac{t^2}{2} \right) \tilde{\psi}_t + O(T) \\
\mathbb{E}[(1, 2) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2 T}{2} + \frac{t T^2}{2} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(2, 1) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(-\frac{t^3}{6} + t T^2 - \frac{T^3}{3} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(2, 2) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^2 T^2}{4} + \frac{t T^3}{2} - \frac{T^4}{8} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^3) \\
\mathbb{E}[(3, 1) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(-\lambda_1 t T + t T + \frac{\lambda_1^2 T^2}{2} - \frac{T^2}{2} \right) \tilde{\psi}_t + O(T) \\
\mathbb{E}[(3, 2) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2} \lambda_1 t^2 T - \frac{t^2 T}{2} - \frac{1}{2} \lambda_1^2 t T^2 + \frac{t T^2}{2} + \frac{\lambda_1^3 T^3}{6} - \frac{T^3}{6} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(4, 1) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{1}{2} \lambda_1^2 t T^2 - \lambda_1 t T^2 + \frac{t T^2}{2} - \frac{1}{6} \lambda_1^3 T^3 + \frac{\lambda_1 T^3}{2} - \frac{T^3}{3} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(4, 2) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(-\frac{1}{4} \lambda_1^2 t^2 T^2 + \frac{1}{2} \lambda_1 t^2 T^2 - \frac{t^2 T^2}{4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \lambda_1^3 t T^3 - \frac{1}{2} \lambda_1 t T^3 + \frac{t T^3}{3} - \frac{1}{24} \lambda_1^4 T^4 + \frac{\lambda_1 T^4}{6} - \frac{T^4}{8} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^3) \\
\mathbb{E}[(1, 3) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(-\frac{t^2}{2} + T t - T \lambda_1 t \right) \tilde{\psi}_t + O(T) \\
\mathbb{E}[(1, 4) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{T t^2}{2} + \frac{1}{2} T \lambda_1 t^2 + \frac{T^2 t}{2} + \frac{1}{2} T^2 \lambda_1^2 t - T^2 \lambda_1 t \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(2, 3) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(-\frac{t^3}{6} - \frac{1}{2} T \lambda_1 t^2 + T^2 t - T^2 \lambda_1 t - \frac{T^3}{3} - \frac{T^3 \lambda_1^3}{6} + \frac{T^3 \lambda_1}{2} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(2, 4) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t^4}{24} + \frac{1}{6} T \lambda_1 t^3 - \frac{T^2 t^2}{4} + \frac{1}{4} T^2 \lambda_1^2 t^2 + \frac{T^3 t}{2} + \frac{1}{2} T^3 \lambda_1^2 t - T^3 \lambda_1 t \right. \\
&\quad \left. - \frac{T^4}{8} + \frac{T^4 \lambda_1^4}{24} - \frac{T^4 \lambda_1^2}{4} + \frac{T^4 \lambda_1}{3} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(3, 3) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(-\frac{t^2}{2} + Tt - T\lambda_1 t \right) \tilde{\psi}_t + O(T) \\
\mathbb{E}[(3, 4) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t^3}{6} - \frac{Tt^2}{2} + \frac{1}{2} T\lambda_1 t^2 + \frac{T^2 t}{2} + \frac{1}{2} T^2 \lambda_1^2 t - T^2 \lambda_1 t \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(4, 3) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(-\frac{t^3}{6} - \frac{1}{2} T\lambda_1 t^2 + T^2 t - T^2 \lambda_1 t - \frac{T^3}{3} - \frac{T^3 \lambda_1^3}{6} + \frac{T^3 \lambda_1}{2} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^2) \\
\mathbb{E}[(4, 4) \text{ элемент}] &= \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{t^4}{24} + \frac{1}{6} T\lambda_1 t^3 - \frac{T^2 t^2}{4} + \frac{1}{4} T^2 \lambda_1^2 t^2 + \frac{T^3 t}{2} + \frac{1}{2} T^3 \lambda_1^2 t - T^3 \lambda_1 t \right. \\
&\quad \left. - \frac{T^4}{8} + \frac{T^4 \lambda_1^4}{24} - \frac{T^4 \lambda_1^2}{4} + \frac{T^4 \lambda_1}{3} \right) \tilde{\psi}_t + O(T^3)
\end{aligned}$$

Таким образом, используя (23), получим итоговое выражение для R_{23} :

$$\mathbb{E}[R_{23}] = \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{2} \left(1 + f_4 \frac{t}{T} + f_5 \frac{t^2}{T^2} + f_6 \frac{t^4}{T^4} \right) \tilde{\psi}_t + O(1), \quad (45)$$

где f_4 , f_5 и f_6 – некоторые функции, определяющиеся как и для (42).

Аналогично получаем выражения для R_{24} :

$$\mathbb{E}[R_{24}] = \text{tr} \left\{ DD \times \mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t \right) \left(\sum_{t=1}^T e_t d_t' \right) \right] \right\}. \quad (46)$$

где выражение для DD получено в (32). Рассматривая математическое ожидание в правой части и используя (39), получим:

$$\mathbb{E} \left[\left(\sum_{t=1}^T d_t \Delta v_t \right) \left(\sum_{t=1}^T e_t d_t' \right) \right] = \sigma_e^2 (\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4), \quad (47)$$

где

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{T-1} \tilde{\psi}_t \\ \sum_{t=0}^{T-1} t \tilde{\psi}_t + O(1) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\eta_2 &= \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{T-1} (T-t) \tilde{\psi}_t \\ \sum_{t=0}^{T-1} \frac{T^2-t^2}{2} \tilde{\psi}_t + O(T) \\ \sum_{t=0}^{T-1} (T-\lambda_1 T) \tilde{\psi}_t + O(T) \\ \sum_{t=0}^{T-1} \frac{(\lambda_1-1)^2 T^2}{2} \tilde{\psi}_t + O(T) \end{pmatrix}, \\
\eta_3 &= \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{T-1} \tilde{\psi}_t \\ \sum_{t=0}^{T-1} (t + \lambda_1 T) \tilde{\psi}_t + O(1) \\ \sum_{t=0}^{T-1} \tilde{\psi}_t \\ \sum_{t=0}^{T-1} t \tilde{\psi}_t + O(1) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

$$\eta_4 = \begin{pmatrix} \sum_{t=0}^{T-1} (T - \lambda_1 T - t) \tilde{\psi}_t + O(1) \\ \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{T^2(1+\lambda_1)^2 - t^2} \tilde{\psi}_t \\ \sum_{t=0}^{T-1} (T - \lambda_1 T - t) \tilde{\psi}_t + O(1) \\ \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{T^2(1-\lambda_1)^2 - t^2} \tilde{\psi}_t + O(T) \end{pmatrix},$$

Используя полученное выражение для матрицы DD , можно показать, что:

$$\mathbb{E}[R_{24}] = \sigma_e^2 T \sum_{t=0}^{T-1} \frac{1}{2} \left(\frac{19}{15} + f_7 \frac{t}{T} + f_8 \frac{t^2}{T^2} \right) \tilde{\psi}_t + O(1), \quad (48)$$

где f_7 и f_8 определяются, как и ранее.

Далее, из (36), (42), (45) и (48), получим:

$$\mathbb{E}[R_2] = \frac{2\sigma_e^2 \psi(1)}{T} \sum_{t=0}^{T-1} \left(\frac{19}{30} + f_6 \frac{t}{T} + f_7 \frac{t^2}{T^2} + f_8 \frac{t^4}{T^4} \right) \tilde{\psi}_t + o(T^{-1}). \quad (49)$$

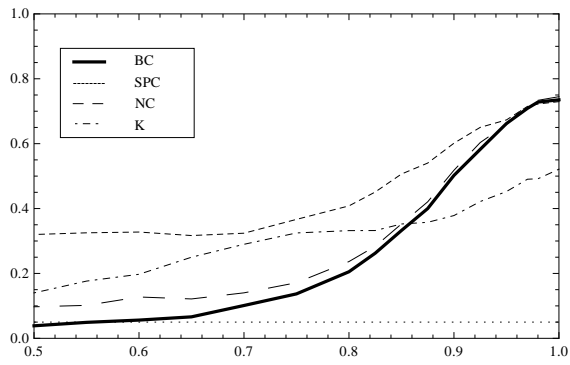
Так как $\sum_{j=0}^{\infty} |\tilde{\psi}_j| < \infty$, сумма в (49) сходится к $\sum_{j=0}^{\infty} (19/30) \tilde{\psi}_j$. Замечая также, что $\psi(1) = 1/\phi(1)$ и $\sum_{j=0}^{\infty} \tilde{\psi}_t = \psi'(1) = \left(\frac{1}{\phi(1)} \right)' = -\frac{\phi'(1)}{\phi^2(1)}$, получим:

$$\mathbb{E}[R_2] = -\frac{1}{T} \frac{19}{15} \frac{\sigma_e^2 \phi'(1)}{\phi^3(1)}. \quad (50)$$

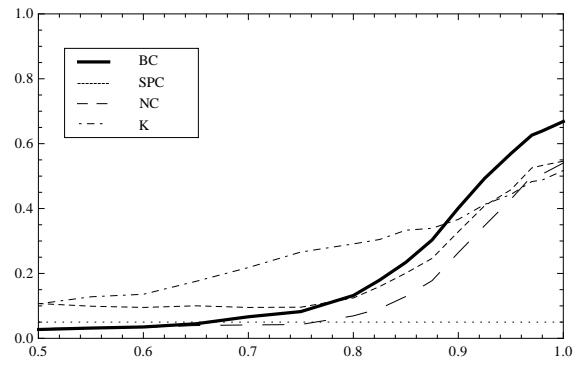
■

Список литературы

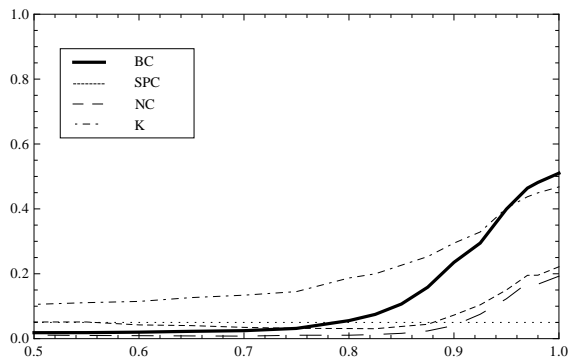
- Busetti, F. and Harvey, A.C. (2001). Testing for the presence of a random walk in series with structural breaks. *Journal of Time Series Analysis*, **22**, 127–150.
- Busetti, F. and Harvey, A.C. (2003). Further Comments On Stationarity Tests In Series With Structural Breaks At Unknown Points. *Journal of Time Series Analysis*, **24**, 137–140.
- Carrion-i Silvestre, J.L., Kim, D., and Perron, P. (2009). GLS-based unit root tests with multiple structural breaks both under the null and the alternative hypotheses. *Econometric Theory*, **25**, 1754–1792.
- Carrion-i-Silvestre, J.L. and Sansó, A. J. (2005). The KPSS test with two structural breaks. *Spanish Economic Review*, **9**, 105–127.
- Carrion-i-Silvestre, J.L. and Sansó, A. J. (2006). A guide to the computation of stationarity tests. *Empirical Economics*, **31**, 433–448.
- Dickey, D.A. and Fuller, W.A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root. *Journal of the American Statistical Association*, **74**, 427–431.
- Harvey, D.I. and Leybourne, S.J. (2012). Break date estimation for models with deterministic structural change. Unpublished manuscript.
- Harvey, D.I. and Mills, T.C. (2003). A note on Busetti-Harvey tests for stationarity in series with structural breaks. *Journal of Time Series Analysis*, **24**, 159–164.
- Kurozumi, E. (2002). Testing for stationarity with a break. *Journal of Econometrics*, **108**, 63–99.
- Kurozumi, E. and Tanaka, S. (2010). Reducing the size distortion of the KPSS test. *Journal of Time Series Analysis*, **31**, 415–426.
- Kwiatkowski, D., P.C.B., Phillips, Schmidt, P., and Shin, Y. (1992). Testing the Null Hypothesis of Stationarity against the Alternative of a Unit Root: How Sure Are We That Economic Time Series Have a Unit Root? *Journal of Econometrics*, **54**, 159–178.
- Lee, J. and Strazicich, M.C. (2001). Testing the null of stationarity in the presence of a structural break. *Applied Economics Letters*, **8**, 377–382.
- Perron, P. (1989). The great crash, the oil price shock and the unit root hypothesis. *Econometrica*, **57**, 1361–1401.
- Perron, P. and Zhu, X. (2005). Structural breaks with deterministic and stochastic trends. *Journal of Econometrics*, **129**, 65–119.
- Phillips, P.C.B. and Solo, V. (1992). Asymptotics for linear processes. *Annals of Statistics*, **20**, 971–1001.
- Sul, D., P.C.B., Phillips, and Choi, C.-Y. (2005). Prewhitening Bias in HAC Estimation. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, **67**, 517–546.
- Tanaka, K. (1996). *Time Series Analysis: Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory*. Wiley, New York.



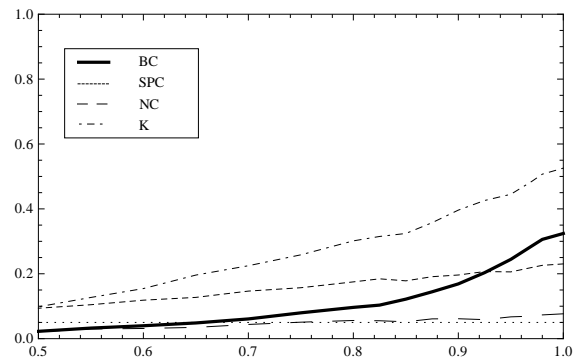
(a) $\theta = -0.8$



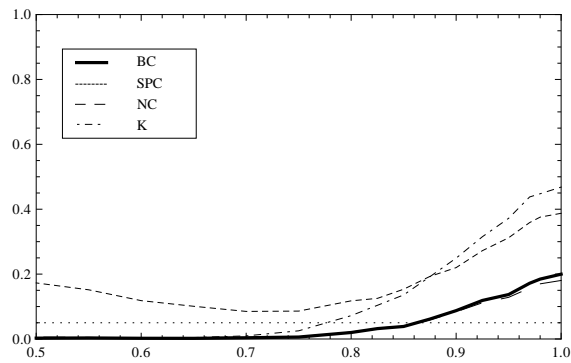
(b) $\theta = -0.4$



(c) $\theta = 0.0$



(d) $\theta = 0.4$



(e) $\theta = 0.8$

Рис. 1. Размер и мощность в случае известной даты сдвига

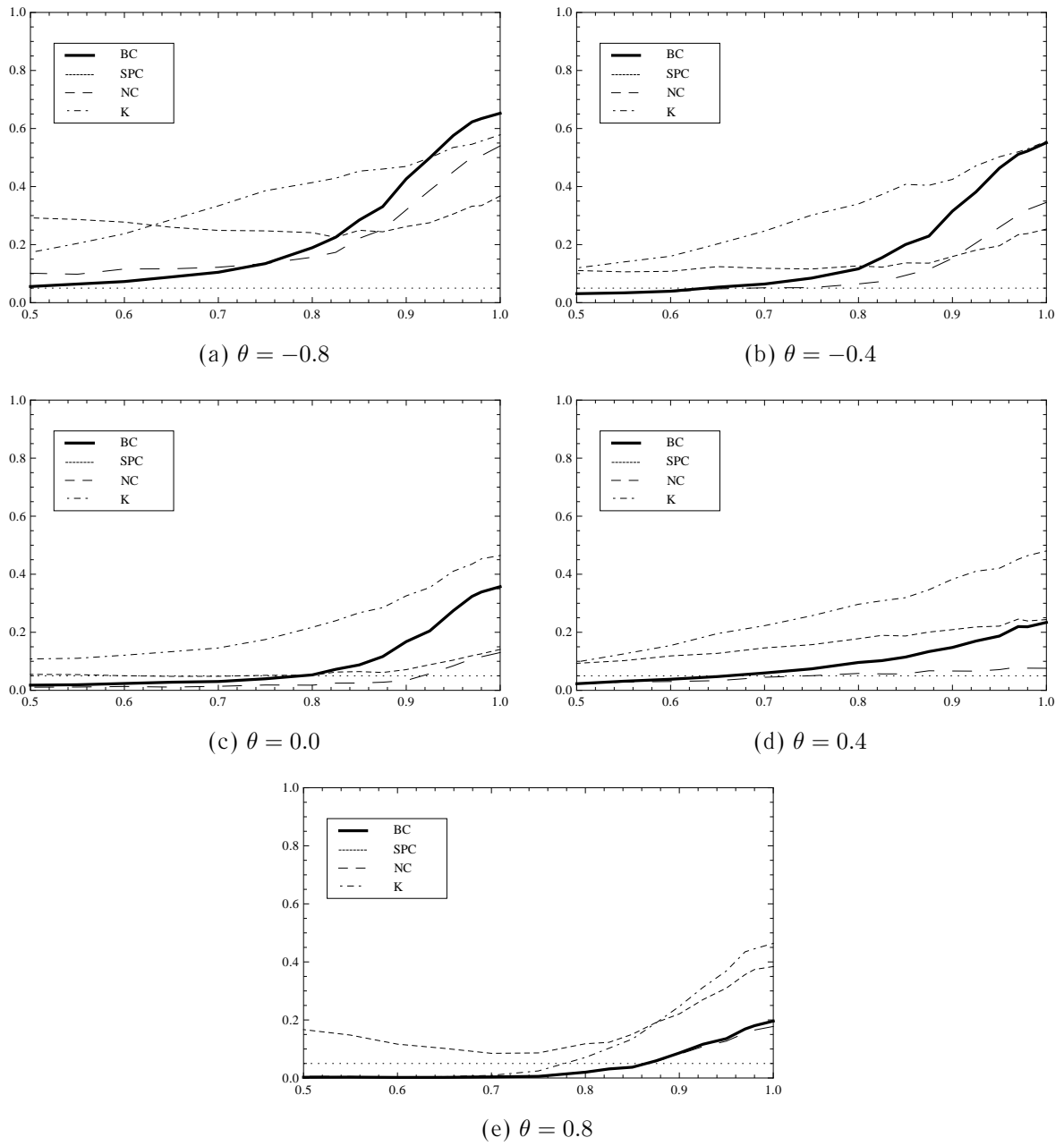


Рис. 2. Размер и мощность в случае неизвестной даты сдвига