

---

# Эконометрическое моделирование

## ОЦЕНКА ТРЕНДОВОГО ТЕМПА РОСТА ВВП ПРИ ПОМОЩИ TVP-ARX-SV-МОДЕЛИ

Е. В. МАЛИКОВА  
Н. Д. ФОКИН

*В статье решается весьма важная задача оценки трендового темпа роста российского ВВП. Для этого используется модель авторегрессии с экзогенными переменными с меняющимися во времени параметрами и стохастической волатильностью (TVP-ARX-SV). В качестве единственной экзогенной переменной используются цены на нефть. Преимуществом данной модели является возможность получения не только меняющегося во времени трендового темпа роста, но и меняющегося во времени мультипликатора выпуска по нефтяным ценам. Тем самым модель лишена каких-либо ограничений на неизменность параметров во времени. Оцененная траектория трендового темпа роста достаточно близка к другим моделям, оцененным различными авторами.*

*Статья подготовлена в рамках выполнения научно-исследовательской работы государственного задания РАНХиГС при Президенте Российской Федерации.*

**Ключевые слова:** реальный ВВП, цены на нефть, трендовый темп роста, меняющиеся во времени параметры.

**JEL:** С32.

### Введение

В отечественной экономической литературе давно ведутся дискуссии о замедлении долгосрочных темпов роста. Помимо замедления темпов роста после мирового финансового кризиса 2008–2009 гг., по всей видимости, еще одно замедление произошло примерно в 2015 г., что заставляет использовать эконометрические модели, позволяющие получать оценки долгосрочного темпа роста с учетом его изменчивости во времени.

В настоящей работе для решения этой задачи используется модель авторегрессии с экзогенными переменными с меняющимися во времени параметрами и стохастической волатильностью (TVP-ARX-SV). Данная модель является частным случаем векторной авторегрессии с меняющимися во времени параметрами и стохастической волатильностью [6], так как мы рассматриваем парную зависи-

мость ВВП от единственной экзогенной переменной — реальной цены на нефть. Под трендовым темпом роста будет пониматься темп роста структурной компоненты ВВП, т.е. математическое ожидание темпа роста ВВП при нулевом среднем темпе роста цен на нефть.

Для решения рассматриваемой задачи в российской литературе используется большое количество эконометрических моделей — как модели с экзогенными структурными сдвигами в детерминированном тренде ВВП, так и модели с меняющимся во времени трендовым темпом роста, но неизменными прочими параметрами. Например, в работе [2] тестируются даты структурных сдвигов в детерминированном тренде российского ВВП в коинтегрирующей регрессии с ценами на нефть. Авторами выявлен структурный сдвиг в третьем квартале 2007 г. На данных после 2015 г. тестирование структурных сдвигов не проводилось,

---

Маликова Екатерина Васильевна, младший научный сотрудник РАНХиГС при Президенте Российской Федерации (Москва), e-mail: malikovaek1@gmail.com; Фокин Никита Денисович, научный сотрудник РАНХиГС при Президенте Российской Федерации (Москва), e-mail: fokinikita@gmail.com

однако авторы получили достаточно высокие оценки замедления трендовых темпов роста, обосновав тем самым учет структурных сдвигов при моделировании российского ВВП.

Рассматривались также и более гибкие модели, позволяющие получать траектории трендового темпа роста, которые меняются в каждый момент времени, а не только в момент структурного сдвига. В [1] траектория темпов трендового роста оценивается на основе ARX-модели с меняющимся во времени темпом трендового роста, который следует процессу случайного блуждания. Представленная модель ненаблюдаемых компонент оценивается с помощью фильтра Калмана. Согласно расчетам автора трендовый темп роста после кризиса 2014 г. снизился до 1%, что может быть реакцией на санкции и международную напряженность.

В [4] рассматриваются два класса моделей, учитывающих структурные сдвиги в детерминированном тренде, и модели с меняющимся во времени темпом роста на основе стохастического тренда, оцениваемые с помощью фильтра Калмана. В [3] используется модель VAR с регуляризационной задачей по типу фильтра Ходрика–Прескотта [5]. Авторами был выделен единый трендовый темп роста основных реальных российских макроэкономических показателей: ВВП без государственных расходов, потребления домохозяйств, инвестиций в основной капитал, экспорта и импорта. Они разделяют и рассчитывают отдельные вклады цен на нефть и структурной компоненты в совокупный рост рассмотренных показателей. Однако метод, используемый ими для оценивания, не позволяет построить доверительные интервалы.

Преимуществом используемого в настоящей работе подхода является то, что в TVP-ARX-SV-модели все параметры (в том числе и дисперсия шока) могут меняться со временем. Помимо оценок трендового темпа роста это позволяет получить и оценку изменяющихся во времени параметров при темпах роста цен на нефть, а также проанализировать измене-

ние мультипликатора (долгосрочной эластичности) ВВП по нефтяным ценам.

### Спецификация модели и методология оценивания

В работе используются квартальные данные – с первого квартала 2000 г. по второй квартал 2021 г. Данные по реальному ВВП очищены от сезонности с помощью процедуры X-12-ARIMA. Реальные цены на нефть получены путем деления номинальных цен на нефть марки Brent на сезонно сглаженный долларовой ИПЦ.

Нами будет рассматриваться модель с одним лагом темпа роста реального ВВП, а также с текущей и первой запаздывающей разностью реальной цены на нефть, поскольку последующие лаги оказываются незначимыми на рассматриваемом периоде:

$$\Delta \ln gdp_t = c_t + a_{1,t} \Delta \ln gdp_{t-1} + b_{0,t} \Delta \ln p_t + b_{1,t} \Delta \ln p_{t-1} + \varepsilon_t,$$

где  $gdp_t$  – реальный ВВП;  $p_t$  – реальная цена на нефть;  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ .

Параметры модели следуют процессу случайного блуждания. Пусть  $\beta_t$  – вектор оцениваемых коэффициентов  $\beta_t = \text{vec}(c_t, a_{1,t}, b_{0,t}, b_{1,t})$ . Тогда

$$\beta_t = \beta_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim N(0, \Omega).$$

Под стохастической волатильностью подразумевается меняющаяся во времени дисперсия ошибки модели  $\varepsilon_t$ , которая имеет нормальное распределение  $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$ . Стохастическая волатильность задается формулой

$$\sigma_t^2 = \bar{\sigma} \exp(\lambda_t),$$

где  $\bar{\sigma}$  – экзогенно заданный параметр масштаба дисперсии ошибки модели, а  $\lambda_t$  следует процессу авторегрессии и рассчитывается по формуле

$$\lambda_t = \gamma \lambda_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim N(0, \varphi),$$

где  $\gamma$  также является гиперпараметром, а параметр  $\varphi$  имеет априорное обратное гамма-

распределение с гиперпараметрами формы  $\alpha$  и масштаба  $\delta$ .

В рассматриваемой модели ожидаемый темп роста ВВП можно разложить на две компоненты, а именно трендовый темп роста (первое слагаемое) и темп роста за счет цен на нефть (второе слагаемое):

$$E(\Delta \ln gdp_t) = \frac{c_t}{1 - a_{1,t}} + \frac{\sum_{i=0}^1 b_{i,t} E(\Delta \ln \text{poil}_{t-i})}{1 - a_{1,t}}.$$

В рамках предпосылки о том, что логарифм реальной цены на нефть следует процессу случайного блуждания без константы, темп роста цен на нефть имеет нулевое математическое ожидание. Из этого следует, что долгосрочный темп роста совпадает с трендовым темпом роста, и рассчитывается он по следующей формуле:

$$E(\Delta \ln gdp_t) = \frac{c_t}{1 - a_{1,t}}.$$

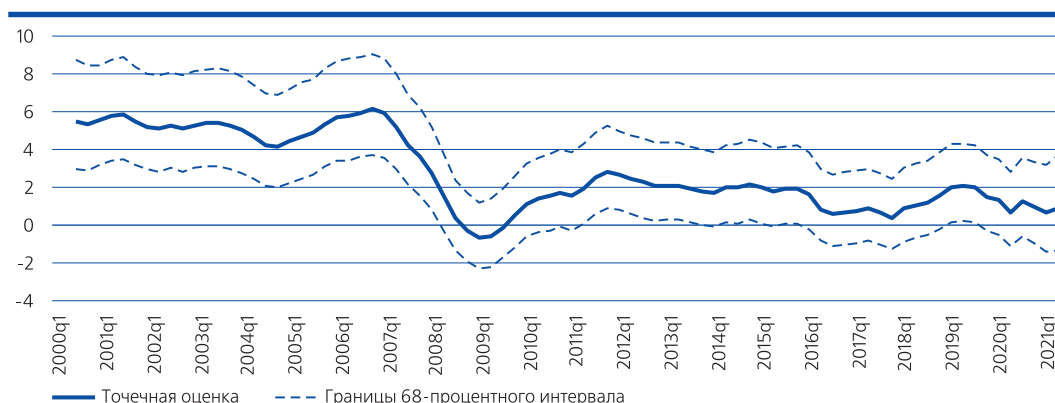
Кроме меняющегося темпа роста можно рассчитать долгосрочный мультипликатор ВВП по ценам на нефть  $M_t$ . Учитывая, что временные ряды используются в логарифмах, данная величина будет являться долгосрочной эластичностью ВВП по ценам на нефть:

$$M_t = \frac{b_{0,t} + b_{1,t}}{1 - a_{1,t}}.$$

Модель оценивается с помощью байесовского подхода в пакете BEAR Toolbox. В качестве точечных оценок параметров используются медианы апостериорных распределений. При расчете медиан и доверительных интервалов из выборки из апостериорного распределения удаляются сэмплы с единичным корнем. Значения гиперпараметров выбраны вручную с целью получения достаточно широкого априорного распределения параметров модели, так как используемый пакет не позволяет перебрать их по сетке.

На рис. 1 представлена динамика трендового темпа роста ВВП. Из него видно, что точечный темп роста находился на уровне в среднем около 5% в год с 2000 по 2007 гг. Далее, во время кризиса 2008–2009 гг., происходит его резкое падение. С 2010 до 2015 гг. средний темп роста составляет примерно 2% в год. После кризиса 2015 г. темп роста замедляется и до конца оцениваемого периода находится на уровне около 1,3% в год. В 2019 г. заметно небольшое кратковременное ускорение, однако даже в этой точке доверительный интервал практически покрывает ноль.

Рис. 1. Трендовый темп роста реального ВВП, в %



Источник: расчеты авторов.

Долгосрочный мультипликатор ВВП по ценам на нефть изображен на рис. 2, из которого, на основе оценок модели, видно, что взаимосвязь российского ВВП с ценами на нефть достаточно стабильна во времени. В отличие от трендового темпа роста мультипликатор оказывается практически неизменным и колеблется около уровня 0,08 почти на всем рассматриваемом периоде. Некоторый рост до уровня 0,1 наблюдается после 2016 г., однако с учетом доверительных интервалов он представляется не таким незначительным. Также отметим, что полученная оценка долгосрочной эластичности близка к оценкам из других работ. Например, в [2] была получена оценка в 0,088 со стандартной ошибкой 0,017 на периоде до второго квартала 2015 г.

### Сравнение оценок долгосрочного темпа роста с оценками, полученными в других работах

Перейдем к сопоставлению полученной оценки трендового темпа роста с оценками из других работ. Мы будем оценивать TVP-ARX-SV-модель и сравнивать результаты на одинаковых выборках. Сравнение будет проведено с: коинтеграционной моделью со сдвигом в детерминированном тренде [2], ARX-моделью со структурным сдвигом [4], VAR-HP-моделью

[3], одной из спецификаций моделей ненаблюдаемых компонент [4], а также ARX-моделью со стохастическим трендом [1]. (См. таблицу.)

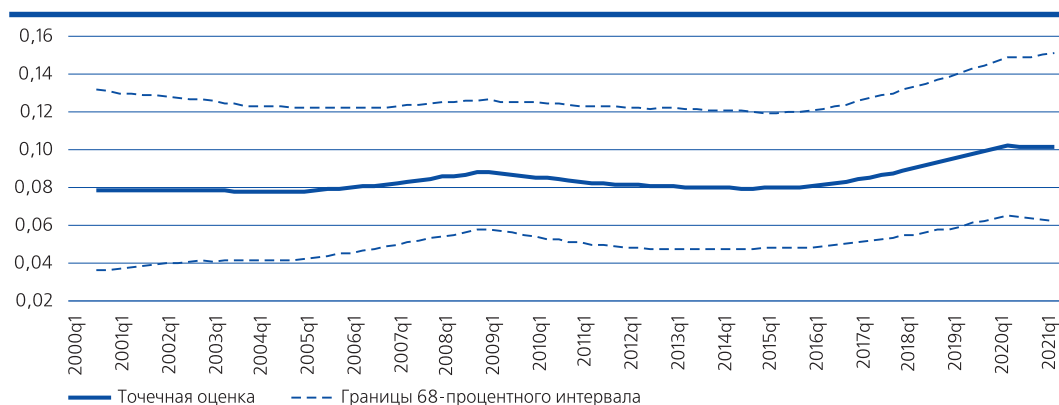
Обращаем внимание, что в работе [3] использовался не реальный ВВП, а реальный ВВП за вычетом государственных расходов, что делает сравнение несколько некорректным, однако государственные расходы в постоянных ценах довольно слабо меняются во времени, в связи с чем было решено добавить результаты данной работы в сравнение.

На выборках 1999q1-2007q2 и 2007q3-2020q4 модель оказывается максимально близка к ARX со структурным сдвигом из работы [4]. При разбиении второго периода на период до и после кризиса 2015 г. рассмотренная модель оказывается близка к первой модификации модели Кларка [4]. С оценками на основе других моделей оценки TVP-ARX-SV также близки.

### Заключение

В работе была рассмотрена TVP-ARX-SV-модель для оценивания темпов трендового роста российского ВВП. Модель дает схожие оценки темпов трендового роста с аналогичными для решения данной задачи моделями из других работ. При этом TVP-ARX-SV имеет большую гибкость в том плане, что параметры при це-

Рис. 2. Долгосрочный мультипликатор ВВП по ценам на нефть



Источник: расчеты авторов.

**Сравнение оценок темпов трендового роста с оценками из других работ**

Модель	Период и оценка (в %)		
	1998q4-2007q3	2007q4-2015q2	
Коинтеграционная модель со сдвигом в детерминированном тренде [2]	5,3	1,3	
TVP-ARX-SV	5,3	1,7	
	1999q1-2007q2	2007q3-2020q4	
ARX со структурным сдвигом [4]	5,4	1,5	
TVP-ARX-SV	5,3	1,5	
	2000q1-2008q2	2008q3-2014q4	2015q1-2019q3
VAR-HP [3]	4,3	2,6	1,9
TVP-ARX-SV	5	1,8	1,2
	1999q1-2007q2	2007q3-2014q4	2015q1-2020q4
Первая модификация модели Кларка [4]	4,9	2,5	1,5
TVP-ARX-SV	5,3	1,7	1,3
	1999-2007	2008-2013	2014-2019
ARX-модель [1]	4-5	2	1
TVP-ARX-SV	5,2	1,5	1,4

Источник: расчеты авторов.

нах на нефть также меняются во времени и позволяют оценить степень изменчивости мультипликатора российского ВВП по ценам на нефть.

На основе результатов оценивания можно заключить, что на выборке до мирового финансового кризиса 2008–2009 гг. трендовый темп роста находился на уровне 5,2–5,3% в год. На выборке с 2007 (или 2008) гг. до кризиса 2015 г. модель оценивает темп трендового роста на уровне 1,5–1,8% в год. После кризиса 2015 г. также диагностируется некоторое

замедление темпов трендового роста – до уровня 1,2–1,3% в год.

В свою очередь, мультипликатор практически не демонстрирует изменчивость во времени, что может служить аргументом в пользу использования более стандартных спецификаций для моделирования трендового темпа роста реального ВВП России. Также такой результат может свидетельствовать о наличии устойчивой и долгосрочной связи между российским выпуском и реальной ценой на нефть с 2000-х годов. ■

**Литература**

1. Полбин А.В. Оценка траектории темпов трендового роста ВВП России в ARX-модели с ценами на нефть // Экономическая политика. 2020. Т. 15. № 1. С. 40–63.
2. Полбин А.В., Скроботов А.А. Тестирование наличия изломов в тренде структурной компоненты ВВП Российской Федерации // Экономический журнал ВШЭ. 2016. Т. 20. № 4. С. 588–623.
3. Полбин А.В., Фокин Н.Д. Эконометрическое моделирование сбалансированной структурной компоненты основных российских макроэкономических показателей // Математическое моделирование. 2020. Т. 32. № 7. С. 98–112.
4. Фокин Н.Д. О важности учета структурных сдвигов при прогнозировании российского ВВП // Прикладная эконометрика. 2021. № 3. С. 5–29.
5. Hodrick R.J., Prescott E.C. Postwar US business cycles: an empirical investigation // Journal of Money, Credit and Banking. 1997. Vol. 29. No. 1. Pp. 1–16.
6. Primiceri G.E. Time varying structural vector autoregressions and monetary policy // The Review of Economic Studies. 2005. Vol. 72. No. 3. Pp. 821–852.

**References**

1. Polbin A.V. Estimation of the trajectory of Russia's GDP trend growth rate in the ARX model with oil prices // *Economic Policy*. 2020. Vol. 15. No. 1. Pp. 40–63.
2. Polbin A.V., Skrobotov A.A. Testing for Structural Breaks in the Long-run Growth Rates of the Russian Economy // *Economic Journal of HSE*. 2016. Vol. 20. No. 4. Pp. 588–623.
3. Polbin A.V., Fokin N.D. Econometric modeling of the balanced structural component of the main Russian macroeconomic indicators // *Mathematical Models*. 2020. Vol. 32. No. 7. Pp. 98–112.
4. Fokin N.D. The importance of modeling structural breaks in forecasting Russian GDP // *Applied Econometrics*. 2021. No. 3. Pp. 5–29.
5. Hodrick R.J., Prescott E.C. Postwar US business cycles: an empirical investigation // *Journal of Money, Credit, and Banking*. 1997. Vol. 29. No. 1. Pp. 1–16.
6. Primiceri G.E. Time varying structural vector autoregressions and monetary policy // *The Review of Economic Studies*. 2005. Vol. 72. No. 3. Pp. 821–852.

**Estimation of the Long-run GDP Growth Rate Using the TVP-ARX-SV Model**

**Ekaterina V. Malikova** – Junior Researcher of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow, Russia). E-mail: malikovaek1@gmail.com

**Nikita D. Fokin** – Researcher of the Russian Presidential Academy of National Economy and Public Administration (Moscow, Russia). E-mail: fokinikita@gmail.com

*The article solves a very important problem of estimation the long-term growth rate of Russian GDP. To do this, an autoregressive model with exogenous variables with time-varying parameters and stochastic volatility (TVP-ARX-SV) is used. Oil prices are used as the only exogenous variable. The advantage of this model is the possibility of obtaining not only a time-varying long-term growth rate, but also a time-varying oil price output multiplier. Thus, the model is devoid of any restrictions on the invariance of parameters over time. The estimated trajectory of the long-term growth rate is quite close to the results of other models estimated by other authors.*

*The article was written on the basis of the RANEPА state assignment research programme.*

**Key words:** real GDP, oil prices, long-term growth rate, time-varying parameters.

**JEL-codes:** C32.